

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour obtenir

le grade de DOCTEUR de 3^e CYCLE en PHYSIQUE NUCLÉAIRE

par

Maurice GIFFON

SUJET

SUR L'ANALYCITÉ DE LA MATRICE S
PAR RAPPORT A LA VARIABLE MOMENT
ANGULAIRE ET L'EXISTENCE DE LA
REPRÉSENTATION DE MANDELSTAM POUR
DES POTENTIELS SINGULIERS .

Soutenue le 20 Mai 1964

devant la Commission d'Examen :

MM. A. SARAZIN

Président

G. PHILBERT

E. PREDAZZI

} Examineurs

R. NATAF

Invité

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour obtenir

le grade de DOCTEUR de 3^e CYCLE en PHYSIQUE NUCLÉAIRE

par

Maurice GIFFON

SUJET

SUR L'ANALYCITÉ DE LA MATRICE S
PAR RAPPORT A LA VARIABLE MOMENT
ANGULAIRE ET L'EXISTENCE DE LA
REPRÉSENTATION DE MANDELSTAM POUR
DES POTENTIELS SINGULIERS .

Soutenue le 20 Mai 1964

devant la Commission d'Examen :

MM. A. SARAZIN

Président

G. PHILBERT

E. PREDAZZI

} Examineurs

R. NATAF

Invité



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554209_0022

UNIVERSITE DE LYON

FACULTE DES SCIENCES

Doyens Honoraires

MM. LONGCHAMBON, DOUIN, MOUSSA, GAUTHIER Henri,

Professeurs Honoraires

MM. LOCQUIN, de LARAMBERGUE, SOLLAUD, MENTZER
MOUSSA, JAFFARD, DOUIN, Henri EYRAUD, DE -
JARDIN, VIRET.

Doyen

M. BRACONNIER

Assesseurs

MM. MESNARD, BOIDIN

Professeurs

MM. LONGCHAMBON	Minéralogie
PRETTRE	Chimie industrielle
COURTY	Chimie-Physique
KUHNER	Botanique
MALECOT	Mécanique rationnelle et appliquée
PARIS	Chimie minérale
AUMERAS	Chimie
COLONGE	Chimie organique
JANIN	Physique générale
FLANDRIN	Géologie appliquée
BERNARD	Physique industrielle
DUFAY Jean	Astronomie
NIGON	Zoologie expérimentale
GAUTHIER Henri	Géologie générale
WAUTIER	Zoologie

MM. CHOPIN	Chimie biologique
CUEILLERON	Chimie
BRACONNIER	Calcul différentiel et intégral
EYRAUD Charles	Chimie-Physique appliquée
SARAZIN	Physique Nucléaire
BOIDIN	Microbiologie et Mycologie
PERES	Physiologie
MESNARD	Electronique
GRANDMONTAGNE	Physique
BOUTILLIER	Minéralogie
LAFOUCRIERE	Physique Nucléaire
DREUX	Chimie organique
TEICHNER	Chimie industrielle
PAVANS de CECCATTY	Zoologie
MERLIN	Chimie analytique
DUFAY Maurice	Physique de l'Atmosphère
FRAISSE	Mathématiques
LUBET	Physiologie
PHILBERT	Physique Nucléaire
COHEN-ADAD	Chimie
DAVID Louis	Géologie générale
CHANEL	Psychophysiologie
MAURY	Méthodes Mathématiques de la Physique
DEPRAZ	Physique Nucléaire
GAUTHIER Jean	Chimie

Professeurs sans Chaire

MM. GAUME	Physique
FERON	Mathématiques
LAFORGUE	Physique
LEGAY	Zoologie expérimentale S.P.C.N.
UZAN	Physique S.P.C.N.
CHENEVOY	Géologie appliquée
GINET	Zoologie
ASCH	Physique
MICHEL Pierre	Minéralogie
DUCET	Biologie végétale

Maîtres de Conférences

Mle MAITROT	Physique
Mme ERICSON	Physique générale
MM. GEVIN	Géologie générale
PONASSE	Mathématiques
d'INCAN	Physique
MARTEL	Mécanique
LEFEBVRE	Mathématiques
PERNET	Mathématiques
CHERY	Physique
BERGEON	Physique C.S.U.
Mle GAUTHERON	Chimie biologique
MM. MATHIEU	Mécanique des Fluides
ERBEIA	Physique
DESCOTES	Chimie organique
PICARD Philippe	Mathématiques
LEMOIGNE	Botanique
DEMARCO	Géologie générale
MICHEL Georges	Biochimie
LEBRETON	Biologie végétale
DAVID Jean	Biologie animale
TOUSSET	Chimie propédeutique
FEUVRAIS Louis	Physique Electricité
PICARD Claude	Mathématiques
SCHMITT Roger	Physique M.P.C.

Maitre de Conférences adjoint

M. PIERRON

Conseiller Administratif

M. BURNET

Secrétaire Principal Honoraire

M. ROUX

AVANT - PROPOS

Je remercie sincèrement Monsieur le Professeur SARAZIN, Directeur du Centre d'Etudes Nucléaires de Lyon et Monsieur le Professeur LAFOUCRIERE qui m'ont permis de travailler dans l'Enseignement Supérieur .

Monsieur le Professeur NATAF, par sa présence à la soutenance de cette thèse, manifeste l'intérêt qu'il porte à ce travail ; je l'en remercie profondément .

Je ne saurais trop louer la largeur de vue si appréciable de Monsieur le Professeur PHILBERT et la compréhension continue dont il a toujours fait preuve à mon égard. Son enseignement et les discussions utiles que nous avons eues m'ont beaucoup apporté .

Toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance vont au Professeur E. PREDAZZI , de l'Université de Turin, Maître de Conférences Associé à la Faculté des Sciences de Lyon, sans lequel ce travail n'aurait pas été possible. Son soutien moral, sa constante aide scientifique, les fructueux échanges de vues que nous avons eus m'ont été infiniment précieux .

Toute ma sympathie va à mes camarades du groupe des hautes énergies, et particulièrement au Dr. HUCK dont la compétence mathématique est si utile à tous, pour la sympathique ambiance qu'ils ont créée dans notre laboratoire et les très intéressantes discussions qu'ils y ont suscitées .

J'exprime mes vifs remerciements à celles qui ont participé à l'élaboration matérielle de ce travail, Madame JOOS et ma soeur . Mon affectueuse reconnaissance va à ma femme pour son soutien moral et sa compréhension .

THE HISTORY OF THE CITY OF BOSTON

The history of the city of Boston is a subject of great interest and importance. It is a city of many centuries, and its history is full of interesting events. The city was founded in 1630, and has since that time been a center of commerce and industry. It has been the seat of many important events, and has played a large part in the history of the United States. The city is now one of the most important cities in the world, and its history is a subject of great interest to all who are interested in the history of the United States.

The city of Boston is a city of many centuries, and its history is full of interesting events. The city was founded in 1630, and has since that time been a center of commerce and industry. It has been the seat of many important events, and has played a large part in the history of the United States. The city is now one of the most important cities in the world, and its history is a subject of great interest to all who are interested in the history of the United States.

The city of Boston is a city of many centuries, and its history is full of interesting events. The city was founded in 1630, and has since that time been a center of commerce and industry. It has been the seat of many important events, and has played a large part in the history of the United States. The city is now one of the most important cities in the world, and its history is a subject of great interest to all who are interested in the history of the United States.

The city of Boston is a city of many centuries, and its history is full of interesting events. The city was founded in 1630, and has since that time been a center of commerce and industry. It has been the seat of many important events, and has played a large part in the history of the United States. The city is now one of the most important cities in the world, and its history is a subject of great interest to all who are interested in the history of the United States.

INTRODUCTION

Une grande attention a été accordée ces dernières années à la théorie non relativiste du potentiel. Ceci, non seulement à cause de sa beauté mathématique et de sa simplicité, mais également pour ses connexions possibles avec le problème plus compliqué de l'interaction des particules élémentaires et de ses implications physiques sur les propriétés d'analyticité des éléments de la matrice S et de l'amplitude totale de diffusion.

Regge pense qu'une des principales raisons du succès du modèle potentiel est que l'on peut le discuter tout à fait rigoureusement et qu'en même temps il donne une image vraiment intuitive du processus de diffusion. De plus, il fournit le langage adéquat pour une théorie relativiste du phénomène. On sait qu'une théorie des champs peut s'interpréter à basses énergies à l'aide d'un potentiel local. Les développements en théorie de la diffusion semblent fournir une très élégante façon d'interpréter les phénomènes à hautes énergies grâce à l'introduction des techniques du moment angulaire complexe.

La théorie du potentiel est un modèle simple d'interaction grâce auquel on peut obtenir des informations sur les propriétés analytiques et sur le comportement asymptotique des quantités physiques impliquées sur la base de techniques mathématiques bien établies.

Il existe différentes approches à la théorie de la diffusion par un potentiel. Historiquement, la première est due à Heisenberg. Les résultats les plus susceptibles d'extension et les plus rigoureux sont dus à Jost et Bargmann. Khuri a montré que les relations de dispersion envisagées en théorie des champs avaient une application en théorie du potentiel. La représentation de Mandelstam peut également être prouvée pour une classe spéciale de potentiels, ceux qui sont une superposition de potentiels de Yukawa, conformément aux travaux de Blankenbecler-Goldberger-Khuri Treiman, Bowcock-Martin, Klein, Regge.

Le point de départ de la théorie est l'équation radiale de Schrödinger et le développement en ondes partielles de l'amplitude de diffusion. On impose des conditions au potentiel en vue de déduire les propriétés analytiques de l'amplitude de diffusion et des éléments de la matrice de diffusion associés aux ondes partielles.

La méthode de Martin donne la plus simple façon de les obtenir par rapport à la variable énergie. L'introduction des techniques du formalisme du moment angulaire complexe dû à Regge, permet de dégager certains traits intéressants de la diffusion qui se prolongent pour les processus à hautes énergies et d'obtenir une preuve de la représentation de Mandelstam pour la classe de potentiels que nous avons mentionnée.

Les résultats que l'on obtient avec une théorie du potentiel sont susceptibles d'être rangés en deux catégories :

1° - ceux qui peuvent raisonnablement s'étendre à une théorie des champs. Ils résultent du comportement asymptotique du potentiel à grande distance puisqu'il a été montré par Charap et Fubini que dans cette région une interaction interprétée du point de vue de la théorie des champs peut se représenter par une superposition de potentiels de Yukawa.

2° - ceux qui dépendent étroitement du comportement du potentiel à faible distance ou, ce qui revient au même, les deux étant fortement reliés, ceux qui dépendent du comportement à haute énergie dans le plan complexe de la variable énergie.

Jusqu'à présent, comme dans les travaux déjà cités, on a considéré tacitement le cas de potentiels moins singuliers à l'origine que le terme centrifuge. Nous appellerons de tels potentiels " réguliers ". Récemment, au contraire, on a étudié le cas de potentiels qui, ayant le même comportement à l'infini que les précédents, sont plus singuliers à l'origine que le terme centrifuge. Nous appellerons ce type de potentiels " singuliers ".

Pourquoi l'étude des potentiels singuliers présente-t-elle un intérêt en physique ? On sait que les potentiels phénoménologiques ne sont généralement pas du type de ceux discutés habituellement en théorie du potentiel. La différence la plus frappante est l'apparition d'un coeur dur fortement répulsif au voisinage de l'origine. D'autre part, il semble établi que les forces de courte portée qui se produisent dans l'échange de plusieurs particules soient répulsives. On mesure donc l'importance des potentiels " singuliers " répulsifs afin de tenir compte de ces faits expérimentaux.

Dans la première partie de notre travail, nous exposerons rapidement les grandes lignes d'une théorie du potentiel. Nous suivrons pour cela les travaux de Newton, Froissart, Regge, Mandelstam, Predazzi, Martin, de Alfaro et autres.

Nous définirons les objets dont nous avons besoin en rappelant leur signification physique. Nous donnerons les résultats de l'étude de l'analyticité des éléments de la matrice S par rapport à la variable énergie. Nous nous attarderons un peu sur l'étude des propriétés d'analyticité par rapport à la variable moment angulaire, qui constitue le but de notre travail, et sur les conditions nécessaires pour obtenir une représentation de Mandelstam.

Dans la deuxième partie, nous rappellerons les propriétés d'analyticité de la matrice S par rapport à la variable moment angulaire pour des potentiels "singuliers" du type

$$V(r) = \frac{A^2}{r^4} + F(r)$$

où $F(r)$ est de type "régulier". Nous suivrons les travaux de Regge et Predazzi qui ont montré que $S(\lambda, k)$ est une fonction méromorphe en λ , et ceux de Eden et Challifour qui prouvèrent que la représentation de Mandelstam n'est pas valable pour de tels potentiels.

La troisième partie sera consacrée à une étude du même genre avec un potentiel singulier qui soit une généralisation du pr c dent, c'est à dire un potentiel du type :

$$V(r) = \frac{A^2}{r^n} + W(r) \quad n > 2$$

où $W(r)$ sera du type "régulier". Nous montrerons en quoi nos résultats diff rent de ceux obtenus avec un potentiel régulier. Nous verrons qu'ils sont la généralisation naturelle de ceux trouvés dans le cas $n=4$. La méthode consistera à généraliser l'excellente étude de Wannier sur les propriétés de l'équation de Mathieu. Nous démontrerons que nous ne pouvons avoir de représentation de Mandelstam, ce qui semble un trait caractéristique des potentiels singuliers.

Dans la conclusion, nous rassemblerons les résultats les plus marquants de notre étude. Nous essayerons de dégager les questions qui nous semblent devoir être examinées dans l'avenir en théorie du potentiel en relation avec ce genre de problèmes.

CHAPITRE I

DEFINITIONS ET QUESTIONS GENERALES CONCERNANT UNE THEORIE NON RELATIVISTE DU POTENTIEL

- 1° - Fondements de la théorie du potentiel
- 2° - Propriétés d'analytité de la matrice S par rapport à la variable moment linéaire k .
- 3° - Propriétés d'analytité de la matrice S par rapport à la variable moment angulaire λ .
- 4° - Propriétés de la matrice S par rapport aux variables λ et k .
- 5° - La représentation de Mandelstam en théorie du potentiel :
 - a) analytité en t pour s fixé.
 - b) analytité en s pour t fixé.

Nous exposerons la trame d'une théorie du potentiel . Nous donnerons les propriétés d'analytité des éléments de la matrice de diffusion par rapport aux variables énergie et moment angulaire en insistant sur ces dernières. Nous exprimerons les conditions nécessaires pour la validité d'une représentation de Mandelstam en théorie du potentiel.

CHAPITRE I

DEFINITIONS ET QUESTIONS GENERALES CONCERNANT UNE THEORIE NON RELATIVISTE DU POTENTIEL

1 ° FONDEMENTS DE LA THEORIE DU POTENTIEL

Ce que nous entendons par théorie non relativiste du potentiel, est simplement l'ensemble de toutes les conséquences déduites de l'équation de Schrödinger, pour une particule soumise à un potentiel local à symétrie sphérique. On sait que, dans ce cas, l'équation tridimensionnelle de Schrödinger se décompose en un ensemble infini d'équations différentielles homogènes de second ordre non couplées :

$$(1.1) \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{r^2} \right) \Psi = V(r) \Psi$$

Nous utilisons ici les unités naturelles, $2m = \hbar = c = 1$, r est la variable radiale, λ est relié au moment angulaire l par

$$(1.2) \quad \lambda = l + 1/2$$

k^2 est l'énergie. Nous considérerons ces variables comme complexes.

L'équation (1.1) admet une double infinité de solutions, caractérisées par différentes conditions aux limites, dont deux seulement sont linéairement indépendantes. Les points 0 et ∞ étant les points singuliers de (1.1), parmi toutes les solutions, nous ne serons concernés que par celles définies par des conditions à l'origine ou à l'infini. Nous supposerons que le potentiel est régulier sur l'axe réel, sauf au plus à l'origine ou à l'infini ; de façon précise, le potentiel sera, sur l'axe réel $\text{Re } r > 0$, à l'infini, tel que :

$$(1.3) \quad \left| V(r) \right|_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \epsilon > 0}} < \frac{M}{r^{1+\epsilon}}$$

et, à l'origine, tel que :

$$(1.3') \quad \left| V(r) \right|_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} < \frac{C}{r^{1-\delta}}$$

Avec ces hypothèses très larges, il est clair que le comportement des solutions à l'origine est dominé par le terme centrifuge ; plus précisément =

$$(1.4) \quad \Psi \underset{r \rightarrow 0}{\sim} C_1 r^{\pm \lambda + 1/2}$$

où C_1 est une constante ; tandis qu'à l'infini, le comportement dépend de la variable énergie,

$$(1.4) \quad \Psi \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} C_2 e^{\pm ikr}$$

où C_2 est une autre constante.

Nous appelons " solution physique ", et nous notons $\Psi_\lambda(r)$ la solution particulière de (1.1) qui, pour $\text{Re } \lambda > 0$ est nulle pour $r=0$ et qui, à l'infini, est normalisée de sorte que sa partie entrante, nommément e^{-ikr} , ait une amplitude unité. Ceci signifie que:

$$(1.5) \quad \begin{cases} \Psi_\lambda(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} C(\lambda, k) r^{\lambda + 1/2} \\ \Psi_\lambda(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{-ikr} - e^{-i\pi(\lambda - 1/2)} S(\lambda, k) e^{-ikr} \end{cases}$$

où C et S sont des coefficients dépendant de λ et k . On appelle " physique " une telle solution car, pour l entier, elle coïncide avec la l ème onde partielle de la solution tridimensionnelle de l'équation de Schrödinger définie par le comportement asymptotique :

$$(1.6) \quad \Psi(r, \theta) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{i\vec{k}r} + \frac{e^{ikr}}{r} f(k, \theta)$$

où $f(k, \theta)$ est l'amplitude de diffusion qui s'exprime en fonction des quantités $S(\lambda, k)$ par :

$$(1.7) \quad f(k, \theta) = \frac{1}{2ki} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[S(l+1/2, k) - 1 \right] P_l(\cos \theta)$$

Nous caractérisons cette " solution physique " par l'équation intégrale associée qui la définit de façon unique. Il est bien connu en théorie des équations différentielles qu'une solution définie par des conditions limites en différents points obéit à une équation intégrale du type de Fredholm. En conséquence, nous obtenons :

$$(1.8) \quad \Psi_\lambda(r) = \Psi_\lambda^{(0)}(r) + \int_0^\infty dr' G_\lambda(r, r', k) V(r') \Psi_\lambda(r')$$

où

$$\Psi_{\lambda}^{(0)}(r) = -i(2\pi kr)^{1/2} e^{-i\pi/2(\lambda-1/2)} J_{\lambda}(kr) \quad (1.9)$$

$$G(r, r'; k) = i \frac{\pi}{2} (rr')^{1/2} e^{-i\pi\lambda/2(\lambda-1/2)} J_{\lambda}(kr_<) H_{\lambda}^{(2)}(kr_>)$$

L'équation (1.8) peut en principe être résolue par une série perturbative de Liouville-Neumann en développant $\Psi_{\lambda}(r)$ en série de Born. Cette série converge dans le plan complexe g de la constante de couplage à l'intérieur d'un cercle de rayon fini centré à l'origine.

La solution physique étant définie par une équation intégrale de Fredholm, on pourrait rechercher ses singularités en g , en k , ou en λ (les deux autres paramètres étant fixés), au moyen de (1.8). Cependant, depuis les travaux de Jost, on a l'habitude de considérer le problème de l'analyticité de $\Psi_{\lambda}(r)$ en introduisant de nouvelles classes de solutions de (1.1).

Nous appellerons "solution régulière" la solution de (1.1) qui se comporte à l'origine comme

$$\Psi(\lambda, k, r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} r^{\lambda+1/2} \quad (1.15)$$

Elle satisfait une équation intégrale du type de Volterra :

$$\Psi(\lambda, k, r) = r^{\lambda+1/2} - \frac{1}{2\lambda} \int_0^r \left[\frac{\lambda+1/2}{y} r^{\lambda+1/2} - r^{\lambda+1/2} \frac{\lambda+1/2}{y} \right] \left[V(y) - k^2 \right] \Psi(\lambda, k, y) dy \quad (1.16)$$

résoluble par le procédé habituel d'itération qui a un sens pour :

$$\text{Re } \lambda > 0 \quad (1.17)$$

On établit aussi que, pour élargir le domaine à gauche dans le plan complexe λ , à partir de (1.16), une connaissance détaillée du comportement du potentiel à l'origine est nécessaire. Le comportement de $V(r)$, pour r petit, détermine donc les singularités de $\Psi(\lambda, k, r)$. Dans $\text{Re } \lambda > 0$, la solution perturbative de (1.16) ne converge que si le noyau est fini. Alors, du théorème de Poincaré, il résulte que $\Psi(\lambda, k, r)$ est une fonction entière de g et de k^2 pour r fixé.

Bien que $\Psi_{\lambda}(r)$ ne soit pas convergente partout, les deux solutions sont proportionnelles conformément à (1.5) :

$$\Psi_{\lambda}(r) = C(\lambda, k) \Psi(\lambda, k, r) \quad (1.18)$$

ce qui montre que les singularités de $\Psi_{\lambda}(r)$ par rapport à k viennent de $C(\lambda, k)$.

Pour les trouver nous introduirons une autre solution de (1.1) que nous appellerons "solution de Jost". Auparavant, nous définirons la solution de (1.1) dite "irrégulière" qui se comporte comme

$$(1.19) \quad \chi(\lambda, k, r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} r^{-\lambda+1/2}$$

Les "solutions de Jost" sont définies par leur comportement à l'infini :

$$(1.20) \quad \begin{aligned} f(\lambda, k, r) &\underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{-ikr} \\ f(\lambda, -k, r) &\underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{ikr} \end{aligned}$$

$f(\lambda, k, r)$ satisfait une équation intégrale de Volterra

$$(1.21) \quad f(\lambda, k, r) = e^{-ikr} - \frac{1}{2ik} \int_r^\infty \left[e^{ik(y-r)} - e^{ik(r-y)} \right] \left[V(y) + \frac{\lambda^2 - 1/4}{r^2} \right] f(\lambda, k, y) dy$$

On montre que la solution perturbative de (1.21) a un sens dans $\text{Im } k < 0$. Dans cette région la solution itérative définit une fonction entière de g et λ . Evidemment $f(\lambda, -k, r)$ satisfait une équation intégrale du même type. Notons que si le potentiel est soumis à des conditions plus restrictives telles que :

$$\int_0^\infty |V(r)| e^{-\mu r} dr < \infty$$

où μ^{-1} est la portée du potentiel, le domaine d'analyticité peut être élargi jusqu'à

$$\text{Im } k < \frac{\mu}{2}$$

Le problème qui se pose est d'obtenir des informations sur le type et la position des singularités dans les plans complexes λ et k des fonctions introduites. En premier lieu on établit les relations entre la fonction d'onde régulière et la fonction d'onde physique et celles entre ces fonctions et les éléments de la matrice S .

On définit la "fonction de Jost" comme le wronskien entre la solution de Jost et la solution régulière :

$$(1.22) \quad f(\lambda, k) = W \left[\varphi(\lambda, k, r), f(\lambda, k, r) \right]$$

Cette fonction étant indépendante de r peut donc se calculer partout.

Comme seulement deux solutions de (1.1) sont linéairement indépendantes,

il existe la relation :

$$(1.23) \quad \Psi(\lambda, k, r) = \alpha f(\lambda, k, r) + \beta f(\lambda, -k, r)$$

En prenant le wronskien des deux côtés de (1.23) avec $f(\lambda, k, r)$ et $f(\lambda, -k, r)$, α et β sont facilement calculées et (1.23) devient :

$$(1.24) \quad \Psi(\lambda, k, r) = \frac{1}{2ik} \left[f(\lambda, k)f(\lambda, -k, r) - f(\lambda, -k)f(\lambda, k, r) \right]$$

Grâce à (1.24) et à (1.5) on obtient aisément :

$$(1.25) \quad \Psi_\lambda(r) = - \frac{2ik}{f(\lambda, -k)} \Psi(\lambda, k, r)$$

qui lie les solutions " régulière " et physique et :

$$(1.26) \quad S(\lambda, k) = \frac{f(\lambda, k)}{f(\lambda, -k)} e^{i\pi(\lambda-1/2)}$$

Le coefficient :

$$C(\lambda, k) = - \frac{2ki}{f(\lambda, -k)}$$

devient donc infini pour les zéros de $f(\lambda, -k)$ et, pour ces valeurs, l'équation (1.8) n'a pas de solutions. Il apparaît donc que $f(\lambda, -k)$ est reliée au dénominateur du noyau résolvant de (1.8). Jost et Pais ont montré que les deux coïncident.

La relation (1.26) nous montre qu'un des avantages d'introduire les fonctions de Jost repose dans la définition des états liés, qui sont racines de

$$(1.27) \quad f(\lambda, -k) = 0$$

et des états résonants et virtuels correspondant aux poles de $f(\lambda, k)$.

De la définition de $f(\lambda, k)$ comme wronskien calculable en un point quelconque r , il suit que :

1° - Les propriétés d'analyticité de $f(\lambda, k)$ en k dépendent seulement des fonctions $f(\lambda, k, r)$ et $f'(\lambda, k, r)$, car $\Psi(\lambda, k, r)$ et $\Psi'(\lambda, k, r)$ sont entières en k^2 , donc dépendent de la queue du potentiel.

2° - Les propriétés d'analyticité de $f(\lambda, k)$ en λ dépendent de $\Psi(\lambda, k, r)$ et $\Psi'(\lambda, k, r)$, car $f(\lambda, k, r)$ et $f'(\lambda, k, r)$ sont entières en λ^2 , donc dépendent du comportement du potentiel d'origine.

2° - PROPRIETES D'ANALYCITE PAR RAPPORT A LA VARIABLE MOMENT LINEAIRE k (λ PHYSIQUE)

On peut étudier les propriétés d'analycité des éléments de la matrice S par rapport à la variable k par la méthode de Martin ou la méthode de Alfaro et Rossetti. Elles sont plus pratiques que l'utilisation de l'équation (1.21) qui ne donne la convergence que sous une ligne $\text{Im } k = \text{Cte}$ et ne permet pas une connaissance du domaine d'analycité complet en général. On suppose que le potentiel est donné par une transformée de Laplace :

$$(1.29) \quad V(r) = \int_{\mu}^{\infty} C(\alpha) e^{-\alpha r} d\alpha \quad C(\alpha) = 0 \text{ pour } \alpha < \mu$$

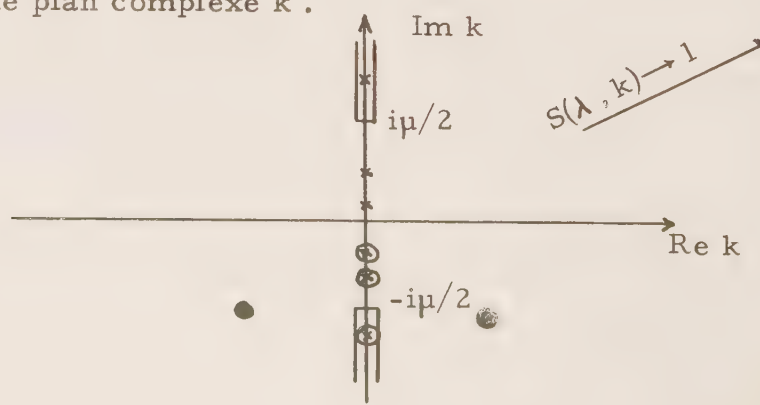
cette hypothèse n'est pas la plus générale mais est raisonnable en vue d'une extension des résultats à une théorie des champs. On fait ensuite un "Ansatz" qui consiste à écrire la solution de Jost sous une forme équivalente à (1.29) en la développant sur les solutions libres avec des conditions limites correspondant à (1.20) :

$$(1.30) \quad f(\lambda, k, r) = e^{-ikr} \left[1 + \int_{\mu}^{\infty} \rho(k, \sigma) e^{-\sigma r} d\sigma \right]$$

En se servant de l'équation de Schrödinger et de la convolution on arrive, dans le cas de l'onde s (mais on peut obtenir des résultats équivalents pour les ondes plus hautes), à :

$$(1.31) \quad \alpha(\alpha + 2ik) \rho(k, \sigma) = \int_{\mu}^{\alpha - \mu} d\beta C(\alpha - \beta) \rho(k, \beta) + C(\alpha)$$

équation dont la discussion conduit à la polologie suivante pour les éléments de la matrice S dans le plan complexe k .



- × états liés
- ⊙ états virtuels
- résonances
- || coupures

La discussion de la méthode montre que les singularités de la matrice S sont reliées au comportement asymptotique de $V(r)$ à l'infini dans $\text{Re } r > 0$.

° - PROPRIETES D'ANALYCITE PAR RAPPORT A LA VARIABLE MOMENT ANGULAIRE λ (k PHYSIQUE).

Les propriétés d'analycité de $f(\lambda, k)$ en λ dépendant des fonctions $\Psi(\lambda, k, r)$ et $\Psi'(\lambda, k, r)$, $f(\lambda, k)$ est analytique dans $\text{Re } \lambda > 0$, Ψ et Ψ' étant et pouvant être construites à partir de la solution itérative de (1.16). Les singularités possibles sont donc confinées dans le demi plan $\text{Re } \lambda < 0$ et dépendent par conséquent des propriétés du potentiel au voisinage de l'origine puisque ces propriétés déterminent l'analycité de $\Psi(\lambda, k, r)$. Il convient alors de préciser le comportement du potentiel à l'origine :

1. Le potentiel domine le terme centrifuge.

Regge et Predazzi, dans le cas $n=4$, Predazzi et nous mêmes, dans le cas n quelconque, montrons que si la solution $\Psi(\lambda, k, r)$ existe, elle devient une fonction paire et entière de λ . Ceci se comprend simplement au moyen du théorème de Poincaré. Si $V(r)$ est répulsif et se comporte à l'origine comme r^{-q} ($q > 2$), les conditions limites de la " fonction d'onde régulière " ne dépendent pas de λ et la solution correspondante est une fonction entière en λ^2 . La matrice S est alors une fonction méromorphe en λ .

Ce cas semble avoir un intérêt physique certain puisqu'un fort coeur dur répulsif n'est pas exclu pour représenter les interactions des particules élémentaires à faible distance. Il fera l'objet des chapitres II et III.

2. Le potentiel se comporte à l'origine comme r^{-2} plus des termes d'ordre $r^{-2+\epsilon}$ ($\epsilon > 0$)

On peut traiter ce cas de la même façon que le suivant pourvu que l'on tienne compte de ce que la fonction d'onde régulière et par conséquent la fonction de Jost présentent deux points de branchement localisés à

$\lambda = \pm \sqrt{A}$ où A est la constante de couplage (coefficient du terme en r^{-2} dans l'expression du potentiel). Ce cas a été étudié par Bethe et Kinoshita.

3. Le potentiel est borné par $r^{-2+\epsilon}$ ($\epsilon > 0$)

Ce cas fut traité de façon détaillée par Newton, Froissart, Mandelstam, Bethe et Kinoshita. Etant donné qu'il est l'hypothèse que nous avons faite sur le potentiel dans ce chapitre, nous l'étudierons de façon détaillée afin que nous puissions voir la différence avec ceux qui seront exposés aux chapitres suivants.

Nous donnons un procédé mis au point par de Alfaro, Predazzi et Rossetti équivalent à ceux développés par les auteurs mentionnés. Son esprit est très semblable à celui utilisé par Martin pour l'étude de l'analyticité en k . Il est fondé sur une représentation de la solution régulière en fonction des solutions régulières libres de différents moments angulaires. En se donnant une représentation adéquate du potentiel on obtient pour la fonction spectrale une équation que l'on peut résoudre par récurrence. Une expression de la fonction de Jost en fonction de la constante de couplage peut être trouvée, ce qui permet d'étudier facilement ses propriétés analytiques.

On suppose, pour simplifier, que $r^2 V(r)$ est régulière à l'origine et on l'écrit, avec Mandelstam :

$$(1.32) \quad r^2 V(r) = g \sum_{n=1}^{\infty} v_n r^n$$

les coefficients v_n étant choisis pour que le potentiel soit borné par une exponentielle décroissante dans le demi plan $\text{Re } r > 0$.

La solution régulière libre étant :

$$\varphi_0(\lambda, k, r) = 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) k^{-\lambda-1/2} \sqrt{kr} J_\lambda(kr)$$

$\varphi(\lambda, k, r)$ se met sous forme d'une série de Neumann :

$$(1.33) \quad \varphi(\lambda, k, r) = 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) k^{-\lambda-1/2} \sqrt{kr} \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\lambda, k) J_{n+\lambda}(kr)$$

avec $C_0 = 1$ afin d'avoir la normalisation correcte à $r = 0$. En reportant (1.32) et (1.33) dans l'équation de Schrödinger nous obtenons, après quelques transformations, un système d'équations à partir desquelles les C_n peuvent être déterminées une fois que l'on connaît C_0 :

$$(1.34) \quad n(n+2\lambda)C_n = g \sum_{p=0}^{n-1/2} \sum_{m=1}^{n-2p} C_{n-m-2p} v_m \left(\frac{2}{k}\right)^m (-1)^p \frac{\Gamma(n+\lambda-p) \Gamma(m+p)(n+\lambda)}{p! (m-1)! \Gamma(n-m-p+\lambda+1)}$$

qui s'écrit :

$$(1.35) \quad C_n = \delta_{n,0} + \sum_{q=0}^{n-1} C_q \frac{K(n,q)}{n(n+\lambda)}$$

$\delta_{n,0}$ assurant la normalisation correcte à l'origine de la fonction d'onde régulière, (1.35) est semblable à une équation intégrale de Volterra et peut être résolue par itération. A partir de (1.34) et (1.35) on voit que $K(n,q)$ est une fonction entière de λ de sorte que les singularités ne proviennent que du dénominateur $(n+2\lambda)$ ou de la non convergence de l'expression. Mais on peut montrer que la convergence uniforme de C_n en n est assurée pour un quelconque λ non entier négatif ou $1/2$ entier. Plus précisément :

$$C_n \sim O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ n \rightarrow +\infty$$

Finalement, les seules singularités de C_n , donc de $\Psi(\lambda, k, r)$ proviennent du dénominateur $n+2\lambda$. Ces singularités sont des pôles simples pour $-\lambda = 1/2, 1, 3/2, \dots$. Mais les pôles dans les entiers négatifs ont un résidu nul et, par conséquent, Ψ est une fonction méromorphe en λ avec un nombre fini de pôles simples pour les valeurs demi entières négatives de λ . Nous en déduisons que $\Psi(\lambda, k, r)$ est une fonction méromorphe en λ avec des pôles simples pour les mêmes valeurs de λ .

En vue d'obtenir une représentation de la fonction de Jost permettant d'étudier ses propriétés d'analyticité en λ , on définit

$$(1.36) \quad F(\lambda, k) = \frac{f(\lambda, k)}{f_0(\lambda, k)}$$

f_0 étant la fonction de Jost libre ($v(r) = 0$). On montre que F s'écrit

$$F(\lambda, k) = 1 - \frac{\pi}{2} \left(\frac{k}{2}\right)^\lambda \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \int_0^\infty dr \sqrt{r} V(r) H_\lambda^{(2)}(kr) \Psi(\lambda, k, r)$$

En se servant de cette formule, de l'équation de Schrödinger et en intégrant sur r , on obtient

$$(1.37) \quad F(\lambda, k) = 1 + \sum_{n=1}^\infty C_n e^{-i(\pi/2)n}$$

Cette série est convergente d'après ce qu'on a dit des C_n .

L'analyticité de la fonction de Jost se déduit donc de celle des C_n . La fonction $F(\lambda, k)$ est analytique partout dans le plan λ fini sauf pour des pôles simples aux valeurs demi entières négatives de λ . La position des singularités ne dépend pas de k . Dans l'expression de la matrice S elles s'annulent puisqu'elles sont communes à $F(\lambda, k)$ et   $F(\lambda, -k)$.

Les singularités de la matrice S sont données par les zéros de la fonction de Jost $f(\lambda, -k)$. Elles peuvent être déterminées grâce à (1.37)   un ordre quelconque en fonction de la constante de couplage g .

4° - PROPRIETES D'ANALYCITE DE LA MATRICE S PAR RAPPORT AUX DEUX VARIABLES λ ET k

Les pôles trouvés dans les plans complexes λ et k sont les intersections de la même surface de singularités de $S(\lambda, k)$. En effet, les fonctions analytiques de deux variables ne sont jamais singulières en des points isolés, mais sur des surfaces analytiques qui, ici, sont de dimension deux.

Nous donnons maintenant les propriétés d'analyticité de la matrice S (et de l'amplitude totale) par rapport aux deux variables complexes λ et k .

On peut montrer qu'il existe deux domaines d'holomorphie de la matrice S pour $\text{Im } k > 0$ et $\text{Re } \lambda < 0$:

$$(1.39) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Re } k > 0 & \text{Re } k < 0 \\ \text{Im } \lambda < 0 & \text{Im } \lambda > 0 \end{array} \right.$$

ayant une frontière commune $\text{Re } k = \text{Im } k = 0$. Ailleurs il peut y avoir des pôles qui, pour λ complexe, sont des pôles de Regge. On peut prouver que dans le cas d'une superposition de potentiels de Yukawa, si k est réel, les pôles de S dans le plan complexe λ sont à l'intérieur d'une bande comprise entre $\text{Re } \lambda = 0$ et

$$\text{Re } \lambda = \lambda_{\text{max}} > 0$$

5° - LA REPRESENTATION DE MANDELSTAM

Nous rappelons ici un certain nombre de résultats relatifs à l'étude de l'analyticité de l'amplitude totale de diffusion par rapport aux variables k et $\cos \theta$.

Après Mandelstam, il est plus commode de travailler dans les variables énergie et moment de transfert liées aux variables k et $\cos \theta$ par :

$$(1.40) \quad \begin{cases} s = k^2 \\ t = -2s(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

Si l'on exprime l'amplitude totale en fonction des amplitudes d'ondes partielles :

$$(1.41) \quad F(\cos \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

la théorie mathématique des polynômes de Legendre nous apprend que $F(\cos \theta)$ converge dans le plan $\cos \theta$ à l'intérieur d'une ellipse de foyer ± 1 dite "petite ellipse de Lehmann". A l'intérieur de cette ellipse (1.41) définit une fonction analytique.

La partie imaginaire de l'amplitude totale de diffusion $f(s, t)$ que l'on peut définir dans la région physique s réel positif et $-4s < t < 0$, par

$$(1.42) \quad F(s, t) = \text{Im } f(s, t)$$

peut se prolonger analytiquement quand s est fixée, t devenant complexe. Elle se développe en ondes partielles suivant :

$$(1.43) \quad F(s, t) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \frac{\delta_{\ell}(k)}{2} P_{\ell}(\cos \theta)$$

et converge dans une ellipse plus grande dite "grande ellipse de Lehmann".

a) Analycité en t pour s fixé à une valeur physique

On peut élargir le domaine d'analycité en t en utilisant les techniques du moment angulaire complexe car, en vue d'écrire une représentation de Mandelstam, nous avons besoin d'informations sur le comportement de $f(s, t)$ pour de grandes valeurs de t .

On peut montrer que pour k réel > 0 :

$$(1.44) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[S(\lambda, k) - 1 \right] = 0$$

dans chaque direction du demi plan $\text{Re } \lambda > 0$ comprenant l'axe imaginaire du plan λ .

Par les techniques du moment angulaire complexe on obtient l'expression

$$(1.45) \quad f(s, t) = -\frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\delta(\lambda, k)} - 1}{\cos n\lambda} P_{\lambda-1/2}(-\cos\theta) d\lambda + \frac{i n}{k} \sum_n S_n P_n(\cos\theta) \frac{2\ell_n+1}{\sin n\ell_n}$$

où les termes de la somme discrète viennent des pôles de $S(\lambda, k)$.

L'intégrale converge dans une hyperbole homofocale à la petite ellipse de Lehmann, excepté pour une coupure de μ^2 à ∞ .

Les deux coniques ayant une région commune, $f(s, t)$ est analytique dans le plan t complexe coupé de μ^2 à ∞ .

Pour de grandes valeurs de t , le comportement de $f(s, t)$ est contrôlé par les pôles de $S(\lambda, k)$ et

$$f(s, t) \sim O(t^{\alpha(s)}) \quad \text{où} \quad \alpha(s) = \ell_s(s)$$

$\ell_s(s)$ étant le ℓ_n avec la plus grande partie réelle.

On a dit que pour un potentiel qui est une superposition de potentiels de Yukawa, $\text{Re } \alpha(s) \ll N$; ceci entraîne que, dans ce cas,

$$(1.46) \quad \frac{f(s, t)}{t^N} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

donc

$\frac{f(s, t)}{t^{N+1}}$ est une fonction analytique dans le plan t coupé de μ^2 à $+\infty$ sauf pour un pôle à $t = 0$.

Evidemment $\text{Im } f(s, t)$ se comporte de la même façon mais, du fait de l'analyticité dans la grande ellipse de Lehmann, la coupure débute à $4\mu^2$. Tout ceci montre que l'on peut écrire pour $\text{Im } f(s, t)$ une relation de dispersion avec un nombre $N+1$ de soustractions :

$$(1.47) \quad \text{Im } f(s, t) = \sum_{j=0}^N \frac{t^j}{j!} g_j(s) + \frac{t^{N+1}}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{dt' \rho(s, t')}{t'^{N+1} (t' - t)}$$

où les $g_j(s)$ sont les dérivées de $\text{Im } f(s, t)$ à $t = 0$. Les $g_j(s)$ sont des fonctions holomorphes de s dans le plan coupé s , appelées constantes de soustraction.

b) Analyticité en s pour t fixé à une valeur physique

t sera réel négatif. Dans ce cas, en employant des techniques analogues aux précédentes, on montre que :

$$f(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\pi(\lambda+1/2)}}{\cos \pi \lambda} \left[\overline{S(\lambda, k)} - 1 \right] P_{\lambda-1/2}(\cos \theta) d\lambda + \frac{i\pi}{k} \sum_n \frac{S_n e^{-i\pi \ln(s)}}{\sin \pi \ln(s)} P_{\ln(s)}(\cos \theta)$$

est analytique dans $\text{Im } k > 0$, sauf en un nombre fini de pôles d'états liés, et qu'elle approche l'approximation de Born pour de grandes valeurs de l'énergie. Toutes ces propriétés se retrouvent dans la formule :

$$(1.50) \quad f(s, t) = f_B(t) + \sum_n \frac{C_n(t)}{s - s_n} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } f(s', t) ds'}{s' - s}$$

Si l'on tient compte de (1.47) dans (1.50), nous obtenons :

$$(1.51) \quad f(s, t) = f_B(t) + \sum_{n=0}^M \frac{C_n(t)}{s - s_n} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^N \frac{t^j}{j!} \int_0^\infty \frac{g_j(s') ds'}{s' - s} + \\ + \frac{1}{\pi^2} t^{N+1} \int_0^\infty ds' \int_{4\mu^2}^\infty dt' \frac{p(s', t')}{(s' - s)(t' - t)}$$

Cette représentation exprime l'analyticité dans les deux variables complexes de la diffusion. C'est une forme très simplifiée de la représentation de Mandelstam due au fait que, dans la diffusion par un potentiel, un seul canal est ouvert. En théorie des champs, il faudrait tenir compte de la loi de substitution qui permet d'établir/la même expression pour l'amplitude de diffusion décrit le processus de diffusion dans tous les canaux ouverts (généralement trois).

La représentation de Mandelstam apparaît comme une double relation de dispersion. Blanckenbecler, Goldberger, Khuri, Treiman ont montré que l'unitarité et la représentation de Mandelstam peuvent remplacer l'équation de Schrödinger dans la construction de la matrice S à l'aide de quelques hypothèses sur les états liés et les termes de soustraction. Pour une superposition de potentiels de Yukawa, Regge a montré qu'avec quelques hypothèses sur le potentiel le nombre de soustraction est nécessairement fini.

Cependant, il est intéressant de noter que, jusqu'à maintenant, seule la forme (1.51) a été prouvée. Personne ne l'a encore établie en théorie des champs et on peut croire qu'elle n'est pas valable en général. Nous rappellerons que (1.51) a seulement été prouvée pour des potentiels Yukawiens bornés à l'origine par le terme centrifuge.

CHAPITRE II

ANALYCITE DANS LE MOMENT ANGULAIRE POUR DES POTENTIELS SINGULIERS DE TYPE $\frac{A^2}{r^4}$

1° - Le travail de Regge et Predazzi

2° - Le travail de Challifour et Eden

Nous exposons ici les travaux de Regge et Predazzi qui ont prolongé l'expression de $S(\lambda, k)$ au demi plan gauche du plan complexe λ en étudiant l'équation de Schrödinger avec un potentiel singulier en $A^2 r^{-4}$, et nous rappelons le travail de Challifour et Eden qui, dans le cas étudié par Regge et Predazzi, ont prouvé la non validité de la représentation de Mandelstam en se servant du travail de Wannier sur l'équation de Mathieu.

CHAPITRE II

ANALYCITE DANS LE MOMENT ANGULAIRE POUR DES POTENTIELS SINGULIERS DE TYPE $\frac{A^2}{r^4}$

1° - LE TRAVAIL DE PREDAZZI ET REGGE

Predazzi et Regge ont étudié les propriétés d'analyticité par rapport à la variable moment angulaire des éléments de la matrice S pour des potentiels en $A^2 r^{-4}$. Ils ont considéré une classe de potentiels de la forme :

$$(2.1) \quad V(r) = \frac{A^2}{r^4} + \frac{B}{r^3} + \frac{C}{r^2} + W(r)$$

où $W(r)$ est tel que :

$$(2.2) \quad W(r) = \int_0^\infty \sigma(\alpha) \frac{\exp(-\alpha r)}{r} d\alpha$$

ces potentiels peuvent d'ailleurs s'écrire de façon évidente :

$$(2.3) \quad V(r) = \int_0^\infty \rho(\alpha) \frac{\exp(-\alpha r)}{r} d\alpha$$

avec

$$\rho(\alpha) = \sigma(\alpha) + C + \alpha B + \frac{\alpha^2}{2} A^2$$

et

$$\rho(\alpha) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha < \mu$$

μ^{-1} étant la portée de l'interaction .

L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$(2.5) \quad y'' - \left[V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] y = 0$$

Pour étudier le comportement des solutions de (2.5), quand r est petit, on part de l'équation :

$$(2.6) \quad y'' - \left(\frac{A^2}{r^4} + \frac{B}{r^3} + \frac{C}{r^2} \right) y = 0$$

Les auteurs l'ont résolue exactement et ont trouvé que la solution régulière à l'origine était :

$$(2.7) \quad y(r) = N r^{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+4C})} \exp\left(-\frac{A}{r}\right) \Psi\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{B}{A} + \sqrt{1+4C}\right), \sqrt{1+4C}+1, \frac{2A}{r}\right]$$

où Ψ est la seconde solution de l'équation hypergéométrique confluyente et N un facteur de normalisation. Cette solution se comporte pour les faibles valeurs de r comme :

$$(2.8) \quad y_1(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} N r^{1+B/2A} \exp\left(-\frac{A}{r}\right)$$

Ils ont montré que y_1 a les propriétés suivantes :

- elle est une fonction entière par rapport à B et à C
- elle n'est pas régulière en A au point A = 0, ce qui signifie qu'il n'y a pas de développement en série dans la constante de couplage A.

Le premier point est très intéressant car, dans C, on peut inclure le terme centrifuge. Il en découle que la solution régulière est analytique en $\ell(\ell+1) = (\ell + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ et par conséquent qu'elle est analytique et paire en $(\ell + 1/2) = \lambda$.

Ce résultat est tout à fait différent de celui trouvé en théorie habituelle de la diffusion où le prolongement analytique de la solution régulière dans le demi plan $\text{Re } \ell < -1/2$ est irrégulier ou même n'existe pas. La raison profonde de ceci doit être recherchée dans le comportement de la solution régulière quand r est faible. Dans le cas d'un potentiel "régulier", la solution régulière se comporte comme :

$$y(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} r^{\ell+1}$$

ce qui montre que les conditions limites dépendent de ℓ . Dans le cas d'un potentiel "singulier", au contraire, le terme dominant l'emporte sur le terme centrifuge à faible distance et les conditions limites sont les mêmes, que nous soyons dans $\text{Re } \ell > -1/2$ ou $\text{Re } \ell < -1/2$.

Les auteurs ont montré également que l'équation complète peut être résolue et que la solution est analytique en ℓ .

Ils ont défini la solution de Jost de (2.5) par les conditions limites suivantes,

$$(2.9) \quad f(k, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \exp(-ikr)$$

De façon précise, $f(k, r)$ satisfait l'équation intégrale

$$(2.10) \quad f(k, r) = e^{-ikr} - \frac{1}{2ki} \int_r^\infty dr' \left\{ \exp[ik(r'-r)] - \exp[-ik(r'-r)] \right\} \left\{ V(r') + \frac{l(l+1)}{r'^2} \right\} f(k, r')$$

Cette équation montre qu'il n'y a aucune différence entre la discussion des propriétés d'analyticité en l , r étant fixé, pour un potentiel "singulier" et pour un potentiel ordinaire ; $f(k, r)$ est donc une fonction analytique entière en $l(l+1)$.

On peut définir la fonction de Jost dans le cas d'un potentiel "singulier" comme

$$(2.11) \quad F(l, k) = W[\underline{y}(r), f(k, \underline{r})]$$

et on remarque qu'elle ne se réduit pas à la définition habituelle pour un potentiel "régulier" car quand $A \rightarrow 0$, il n'y a pas analyticité en $A = 0$. A l'aide de cette définition, R et P ont obtenu pour $S(l, k)$, la relation :

$$(2.12) \quad S(l, k) = \frac{F(l, k)}{F(l, -k)} \exp(i\pi l)$$

qui est analogue à celle obtenue pour les potentiels ordinaires. On voit que, F étant analytique en $l(l+1)$, S est une fonction méromorphe en l . F possède donc, sauf si elle se réduit à une exponentielle ou à un polynôme, un nombre infini de zéros, ce qui revient à dire que S a un nombre infini de pôles. Nous montrerons que ceci est un trait général des potentiels singuliers.

Predazzi et Regge se proposaient d'obtenir un prolongement analytique de l'amplitude de diffusion dans $\text{Re } l < -1/2$. Ils sont arrivés à résoudre le problème après avoir prolongé $S(l, k)$ grâce aux résultats que nous avons exposés et qui seuls nous intéressent pour notre travail. Ils n'avaient donc pas en vue l'obtention d'expressions explicites des fonctions de Jost et par conséquent n'ont pu se prononcer sur la validité de la représentation de Mandelstam.

2° - LE TRAVAIL DE CHALLIFOUR ET EDEN

Challifour et Eden considèrent un potentiel $V(r)$ tel que :

$$V(r) = \frac{g^2}{r^4}$$

ANALYCITE DANS LE MOMENT ANGULAIRE
POUR DES POTENTIELS SINGULIERS DE TYPE $\frac{A^2}{r^n}$

1° - Introduction.

2° - Propriétés générales des fonctions de Jost par rapport à λ .

3° - Propriétés asymptotiques des fonctions de Jost pour de grandes valeurs de λ :

- a) Définitions des solutions de l'équation de Schrödinger en ses points singuliers.
- b) Introduction de la fonction $X(\lambda, k)$.
- c) Recherche de la limite inférieure de X .
- d) Recherche de la limite supérieure de X .
- e) Limite asymptotique de la fonction de Jost.

4° - Discussion de l'existence de la représentation de Mandelstam.

Nous étudions dans ce chapitre les propriétés analytiques par rapport à la variable moment angulaire complexe des fonctions de Jost et des éléments de la matrice S pour une classe de potentiels répulsifs assez large, se comportant au voisinage de l'origine comme des inverses de puissances arbitraires de la variable radiale dominant le terme centrifuge. Le comportement asymptotique de la fonction de Jost $f(\lambda, k, A)$ pour de grands moments angulaires est obtenu à l'aide de la méthode W.K.B. Les implications de la distribution asymptotique des pôles dans le plan complexe λ sur les possibilités d'écrire une représentation de Mandelstam sont discutées.

Très peu de travaux ont été faits sur ce sujet jusqu'à maintenant. Les seuls que nous connaissions sont donnés dans la bibliographie. La cause doit en être cherchée dans les difficultés mathématiques que l'on rencontre et en particulier dans la méconnaissance des fonctions satisfaisant une équation différentielle avec plus d'un point singulier irrégulier comme présentement le devient l'équation de Schrödinger.

Dans le champ des potentiels singuliers, il y a un très grand degré de liberté dans le choix de la forme spécifique de l'interaction à l'origine. Nous nous limiterons à la considération de potentiels répulsifs à l'origine pour lesquels la définition d'une solution "régulière" et d'une solution "irrégulière" est sans ambiguïté.

Nous ne considérons que des potentiels qui, plus "singuliers" à l'origine que le terme centrifuge, ont encore un caractère analytique en ce sens qu'ils se comportent à l'origine comme des inverses de puissances de la variable radiale r . Nous ferons également l'hypothèse que, conformément à ce que l'on a dit, l'interaction se comporte à l'infini comme une superposition de potentiels de Yukawa. Cette hypothèse d'ailleurs ne jouera aucun rôle dans les considérations que nous développerons car nous ne nous intéressons pas ici aux propriétés analytiques par rapport à la variable énergie. Nous nous limiterons au problème de l'analyticit   par rapport à la variable moment angulaire complexe $\lambda = \ell + 1/2$. La forme du potentiel sera donc :

$$(3.1) \quad V(r) = \int_0^{\infty} \rho(\alpha) e^{-\alpha r} d\alpha$$

avec

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccc} |\rho(\alpha)| & \longrightarrow & \alpha^{n-1} \\ \alpha \longrightarrow \infty & & \end{array}$$

$$n > 2$$

$$\rho(\alpha) = 0 \quad \text{pour } \alpha < \mu$$

n étant arbitraire et μ étant la portée du potentiel.

La propriété (3.2) tient compte du fait que $V(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} 1/r^n$. La forme (3.1) nous permet de prolonger $V(r)$ dans le demi plan $\text{Re } r > 0$.

2° - ETUDE DES PROPRIETES GENERALES DES FONCTIONS DE JOST PAR RAPPORT A LA VARIABLE λ .

Nous étudions ici quelques traits généraux communs à la classe de potentiels supposés répulsifs à l'origine (comme les forces de courtes portées dues à l'échange de plusieurs particules semblent l'être) et tels que, en accord avec (3.1),

$$(3.3) \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^n V(r) = A^2$$

$$n > 2, \quad A^2 > 0$$

Afin de nous limiter à un problème assez simple, nous supposons que

$$(3.4) \quad V(r) \sim \frac{A^2}{r^n} - W(r)$$

où $W(r)$ est une interaction " régulière " en ce sens que

$$(3.5) \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^2 W(r) = 0$$

Cette limitation simplifie beaucoup notre analyse mais elle n'est pas strictement nécessaire. Rien d'essentiel cependant n'est changé si $W(r)$ est encore irrégulier avec des inverses de puissance plus grande que 2 mais inférieure à n . L'élaboration mathématique serait plus complexe mais les résultats seraient de même nature.

Evidemment, à grande distance, comme on le fait habituellement, l'interaction conformément à (3.1), est de type yukawien . La méthode suivie ici est une extension triviale de celle donnée par Regge et Predazzi dans le chapitre II pour le cas $n = 4$.

L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$(3.6) \quad \Psi'' + \left(k^2 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{r^2} - \frac{A^2}{r^n} + W(r) \right) \Psi = 0$$

Evidemment $A \neq 0$, sinon (3.6) se réduit au cas bien connu des potentiels " réguliers " . On peut montrer, comme l'ont fait Regge et Predazzi, que les solutions de (3.6) ne sont pas analytiques pour $A=0$ et qu'aucun développement par rapport à la constante de couplage A ne peut être obtenu . Nous examinerons ce problème quelques lignes plus bas .

Visiblement (3.6) a deux points singuliers irréguliers $r = 0$ et $r = \infty$.
 A l'infini, nous avons

$$\Psi_r \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{\pm ikr}$$

ce qui correspond au comportement asymptotique des deux solutions de Jost :

$$(3.7) \quad \begin{aligned} f(\lambda, k, A, r) &\underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{-ikr} \\ f(\lambda, -k, A, r) &\underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{ikr} \end{aligned}$$

On obtient alors les équations intégrales suivantes pour $f(\lambda, \pm k, A, r)$

$$(3.8) \quad \begin{aligned} f(\lambda, \pm k, A, r) = & e^{\mp ikr} + \frac{1}{2ik} \int_r^\infty \left[e^{ik(r'-r)} - e^{ik(r-r')} \right] \left[\frac{\lambda^2 - 1/4}{r'^2} + \frac{A^2}{r'^n} - W(r') \right] \\ & \cdot f(\lambda, \pm k, A, r') dr' \end{aligned}$$

(3.8) montre que, comme dans le cas de potentiels réguliers, les deux solutions de Jost sont des fonctions entières de λ^2 conformément au théorème de Poincaré. Elles n'ont donc aucune singularité dans le plan complexe λ fini et elles sont paires par rapport au moment angulaire λ comme il apparaît dans l'écriture de (3.8).

Cette similitude ne se conserve pas pour la solution régulière à l'origine, la situation entre potentiels singuliers et réguliers étant totalement différente comme l'ont montré Regge et Predazzi pour le cas $n = 4$

Considérons l'équation tronquée :

$$(3.9) \quad \Psi'' - \frac{A^2}{r^n} \Psi = 0$$

déterminant le comportement des solutions de (3.6) au voisinage de l'origine. Les solutions de cette équation sont du type

$$(3.10) \quad \Psi = C r^{1/2} Z \frac{1}{2-n} \left(2i A \frac{r^{(2-n)/2}}{2-n} \right)$$

où Z est une quelconque fonction de Bessel et où $A = +\sqrt{A^2}$, C étant une constante de normalisation. En choisissant convenablement la constante de normalisation C nous pouvons écrire la solution que nous appellerons "régulière" à l'origine et qui sera de carré sommable :

$$\Psi_1 = \left(\frac{2}{n}\right)^{1/2} \left(\frac{2A}{n-2}\right)^{1/2} r^{1/2} K_{1/2-n} \left(\frac{2A}{n-2} r^{(2-n)/2}\right)$$

$$(3.11)$$

$$\underset{r \rightarrow 0}{\sim} r^{n/4} e^{-\frac{2A}{n-2} r^{(2-n)/2}}$$

La solution "irrégulière" sera choisie telle que :

$$\Psi_2 = (2n)^{1/2} \left(\frac{2A}{n-2}\right)^{1/2} r^{1/2} I_{1/2-n} \left(\frac{2A}{n-2} r^{(2-n)/2}\right)$$

$$(3.12)$$

$$\underset{r \rightarrow 0}{\sim} r^{n/4} e^{2A/(n-2)r^{(2-n)/2}}$$

La solution régulière complète de (3.6) s'écrit :

$$\Psi(\lambda, k, A, r) = \Psi_1(r) - \frac{1}{2A} \int_0^r \left[\overline{\Psi_1(r')} \Psi_2(r) - \Psi_1(r) \overline{\Psi_2(r')} \right] \times$$

$$\left[\frac{\lambda^2 - 1/4}{r^2} - W(r') - k^2 \right] \Psi(\lambda, k, A, r') dr'$$

L'expression de Ψ prouve que, contrairement à ce qui se passe pour le cas de potentiels réguliers, la fonction d'onde régulière à l'origine est une fonction entière en λ^2 , paire en λ . Cette propriété semble être un trait commun pour tous les potentiels plus singuliers à l'origine que le terme centrifuge.

Examinons les propriétés d'analyticité par rapport à la constante de couplage A . (3.8) montre que les solutions de Jost sont encore des fonctions ent res de A mais (3.13) entraîne que ceci n'est plus vrai pour la solution régulière. En effet, (3.13) perd toute signification pour $A \rightarrow 0$.

Nous rappellerons qu'une telle situation fut déjà rencontrée dans le cas $n=4$. La situation actuelle n'a donc rien de surprenant. En effet, quand $A=0$, l'équation tronquée se substituant à (3.9) est celle contenant le terme $\frac{\lambda^2 - 1/4}{r^2}$ et les solutions correspondantes se comportent à l'origine comme $r \pm \lambda^{+1/2}$ qui n'apparaissent pas comme la limite pour $A \rightarrow 0$ des solutions que nous avons définies ici, ce qui devrait être le cas si les solutions données par (3.13)  taient analytiques pour $A=0$.

Ceci nous prouve que $A=0$ est une singularité essentielle de la solution .

Nous définissons les fonctions de Jost comme d'habitude par le wronskien entre les solutions de Jost et la solution régulière

$$(3.14) \quad f(\lambda, \pm k, A) = W \left[\overline{f(\lambda, \pm k, A, r)}, \Psi(\lambda, k, A, r) \right]$$

Cette définition ne se réduit pas à la définition habituelle de la fonction de Jost dans la limite $A=0$ à cause du manque d'analyticité de la fonction d'onde régulière par rapport à la constante de couplage A . Cependant nous voyons que, comme dans le cas d'un potentiel régulier, (3.14) nous fournit la définition que nous désirons des éléments de la matrice S

$$(3.15) \quad S(\lambda, k) = \frac{f(\lambda, k, A)}{f(\lambda, -k, A)} e^{i\pi(\lambda - 1/2)}$$

Du fait que les solutions de Jost et la fonction d'onde régulière sont des fonctions entières de λ , les deux fonctions de Jost $f(\lambda, \pm k, A)$ sont des fonctions entières de λ . Nous en déduisons par (3.15) que $S(\lambda, k)$ est une fonction méromorphe dans le plan complexe fini λ avec des pôles disposés symétriquement car les solutions de Jost et la fonction d'onde régulière étant paires en λ , les deux fonctions de Jost le sont :

$$(3.16) \quad f(\lambda, \pm k, A) = f(-\lambda, \pm k, A)$$

par conséquent, conformément à (3.15) et (3.16) ,

$$S(-\lambda, k) = \frac{f(-\lambda, k, A)}{f(-\lambda, -k, A)} e^{-i\pi(\lambda + 1/2)} = \frac{f(\lambda, k, A)}{f(\lambda, -k, A)} e^{-i\pi(\lambda + 1/2)} = S(\lambda, k) e^{-2i\pi\lambda}$$

soit

$$(3.17) \quad S(-\lambda, k) e^{i\pi\lambda} = S(\lambda, k) e^{-i\pi\lambda}$$

Cette équation déjà obtenue par Regge et Predazzi dans le cas de potentiel en $1/r^4$, apparaît donc comme une propriété de symétrie générale pour un quelconque potentiel plus singulier à l'origine que le terme centrifuge.

Il est intéressant de noter que la m romorphie des éléments de la matrice S dans le plan complexe λ est en général différente du résultat obtenu dans le cas d'un potentiel régulier. Cependant, il a été montré par Froissart, Newton,

Mandelstam, de Alfaro, Rossetti et Predazzi que si l'on permet, dans le cas d'un potentiel régulier, au potentiel d'interaction d'être une fonction entière de r bornée par un potentiel de Yukawa à l'infini, alors, les fonctions de Jost sont des fonctions méromorphes de λ avec des pôles simples aux valeurs données entières négatives de λ ce qui entraîne que les éléments de la matrice S sont des fonctions méromorphes en λ .

Nous nous proposons d'utiliser les résultats précédents dans la formule de Watson, Sommerfeld - Regge

$$(3.18) \quad f(k, \theta) = -\frac{1}{k} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\cos n\lambda} P_{\lambda-1/2}(\cos\theta) e^{-in(\lambda+1/2)} [S(\lambda, k) - 1] \\ + 2in \sum_n S_n P_{\lambda_n}(\cos\theta) e^{-in(\lambda_n+1/2)} \frac{\lambda_n}{\cos n\lambda_n}$$

où les λ_n sont les positions des pôles de $S(\lambda, k)$ dans le plan complexe λ et les S_n les résidus correspondants. Conformément à (3.17) et au fait que $P_{\lambda-1/2}(\cos\theta)$ est paire par rapport à λ pour λ imaginaire, on voit que l'intégrant contenant $S(\lambda, k)$ est une fonction impaire en λ ce qui entraîne que l'intégrale correspondante est nulle. L'intégrale restante

$$\frac{1}{k} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\cos n\lambda} P_{\lambda-1/2}(\cos\theta) e^{-in(\lambda+1/2)}$$

est une fonction $g(k, \cos\theta)$ qui ne dépend pas de l'interaction.

L'amplitude de diffusion se réduit alors, à une constante près, à une somme discrète. Nous montrerons dans la suite que cette somme discrète doit contenir une infinité de termes, ce qui signifie que nous obtenons une série et non un polynôme. Ceci est certainement le cas si les fonctions de Jost qui sont entières en λ ne sont pas de simples polynômes en λ (ce que nous excluons du fait que la procédure d'itération nécessaire pour obtenir les solutions de (3.8) et (3.13) donnera en général une série en λ^2). Ceci est aussi le cas si les fonctions de Jost ne sont pas des exponentielles (ce que nous excluons également car, dans ce cas, l'amplitude de diffusion n'aurait pas de pôles et se réduirait à $g(k, \cos\theta)$.)

Des raisons physiques suggèrent que la contribution à l'amplitude de

diffusion doit provenir d'une somme infinie sinon elle se réduirait à un pur scattering de résonance, ce qui n'est jamais observé. S'il existe une infinité de pôles, il y a de bien meilleures chances pour que ceux reposant suffisamment loin de l'axe réel λ simulent le background observé expérimentalement.

Si l'amplitude de diffusion se réduit à une somme infinie de pôles reposant dans le plan complexe λ , la question qui se pose est de savoir où ils sont localisés, au moins asymptotiquement, en vue de savoir si l'on peut ou non écrire une représentation de Mandelstam. Nous étudierons donc la distribution asymptotique des pôles de $S(\lambda, k)$ dans le plan complexe λ et nous montrerons, qu'en général, pour des potentiels singuliers en r^{-n} les éléments de la matrice S et l'amplitude totale de diffusion sont des fonctions méromorphes dans le plan complexe λ avec un nombre infini de pôles dont la partie réelle peut devenir infinie. Nous en déduirons qu'aucune relation de dispersion ne peut être obtenue par rapport à la variable moment de transfert.

3° - PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DES FONCTIONS DE JOST POUR DE GRANDES VALEURS DU MOMENT ANGULAIRE λ .

Pour remplir le programme esquissé dans le paragraphe 2 nous devons trouver la distribution asymptotique des zéros des fonctions de Jost dans le plan complexe λ puisque, conformément à (3.15), les zéros sont reliés aux pôles de $S(\lambda, k)$.

Dans ce but, nous cherchons l'expression asymptotique de la fonction d'onde régulière à l'origine puisque nous savons qu'elle dépend des fonctions de Jost. Pour cela, nous emploierons la méthode W. K. B., comme cela a été fait par Wannier pour le cas $n = 4$. Nous serons conduit à introduire une fonction $X(\lambda, b)$ dont nous aurons à chercher une limite inférieure et une limite supérieure. Cette fonction $X(\lambda, b)$ sera reliée à la fonction de Jost et la procédure suivie nous permettra d'avoir l'expression de cette fonction pour de grandes valeurs de λ .

a) Définition des solutions de l'équation dans ses points singuliers

Nous partons de l'équation tronquée

$$(3.21) \quad \Psi'' + \left(k^2 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{r^2} - \frac{A^2}{r^n} \right) \Psi = 0$$

L'étude de (3.6) sera considérée comme effectuée par les techniques perturbatives habituelles une fois que (3.21) sera résolue.

Nous introduirons 4 solutions de (3.21) normalisées comme suit

$$(3.22) \quad \begin{cases} \varphi_r \underset{r \rightarrow 0}{\sim} r^{n/4} e^{(-2A/n-2) r^{(n-2)/2}} \\ \varphi_s \underset{r \rightarrow 0}{\sim} r^{n/4} e^{(2A/n-2) r^{(n-2)/2}} \end{cases}$$

$$(3.23) \quad \begin{cases} f_+ \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{ikr} \\ f_- \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{-ikr} \end{cases}$$

Nous reconnaissons dans ces solutions celles obtenues en étudiant le comportement des solutions de (3.6) au voisinage de 0 et de $+\infty$ qui sont les points singuliers irréguliers de (3.6).

Ces deux ensembles de solutions sont évidemment deux ensembles complets de solutions de (3.6) définies par les conditions limites (3.22) et (3.23). Le problème mathématique qui se pose est de trouver la relation entre ces deux ensembles de solutions indépendantes ou, de façon équivalente, de trouver le comportement de chaque solution au point singulier autre que celui dans lequel elle a été définie. Par exemple, il est suffisant de connaître les coefficients multipliant $e^{\pm ikr}$ dans le développement asymptotique de φ_r à grande distance puisque nous savons qu'ils sont ce que l'on appelle les fonctions de Jost définies par (3.14).

Ce problème est en général de la plus haute difficulté mathématique et nous n'avons pas essayé de le résoudre complètement. Nous avons seulement déterminé les traits qui nous semblaient utiles du point de vue des propriétés

d'analyticité dans le plan complexe λ .

Dans (3.21), nous faisons les changements de variable et de fonction suivants :

$$(3.24) \quad r = e^z \left(\frac{A}{K} \right)^{2/n} \longleftrightarrow z = \ln \left[r \left(\frac{K}{A} \right)^{2/n} \right]$$

$$\Psi(z) = C e^{z/2} \phi(z)$$

où C est une constante de normalisation et où nous avons introduit le paramètre $k = iK$ afin de rendre le changement de variable réel. Compte tenu de

$$\frac{d\Psi}{dr} = \frac{d\Psi}{dz} \cdot \frac{dz}{dr}$$

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} = \frac{d^2\Psi}{dz^2} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 + \frac{d\Psi}{dz} \frac{d^2z}{dr^2} = \left(\frac{d^2\Psi}{dz^2} - \frac{d\Psi}{dz} \right) \frac{1}{e^{2z} \left(\frac{A}{K} \right)^{4/n}}$$

et de

$$\frac{d\Psi}{dz} = C e^{z/2} \left[\frac{\phi(z)}{2} + \phi'(z) \right]$$

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} = C e^{z/2} \left[\phi''(z) + \phi'(z) + \phi(z) \right]$$

l'équation (3.21) devient :

$$(3.25) \quad \phi'' - \phi \left[\lambda^2 + b^2 (e^{2z} + e^{-(n-2)z}) \right] = 0$$

avec :

$$(3.26) \quad b^2 = A^{4/n} K^{2(1-2/n)}$$

$$b = +\sqrt{b^2}$$

La constante C dans (3.24) sera déterminée afin de fixer les conditions de normalisation pour les différentes solutions de (3.25) en accord avec les conditions limites (3.22) et (3.23). Cela signifie que les solutions de (3.25) que nous définirons, seront normalisées aux points singuliers irréguliers de l'équation, qui sont maintenant $\pm \infty$, afin de redonner les solutions de l'équation (3.21) définies précédemment et normalisées selon (3.22) et (3.23), les transformations inverses

de (3.24) ayant été effectuées.

Etudions donc le comportement des solutions de (3.25) dans les points singuliers irréguliers $\pm \infty$:

- si $z \rightarrow +\infty$ -

l'équation (3.25) devient :

$$\phi'' - \phi \left[\lambda^2 + b^2 e^{2z} \right] = 0$$

ayant pour solutions :

$$(3.27) \quad \begin{aligned} & K_{\lambda} (b e^z) \\ & I_{\lambda} (b e^z) \end{aligned}$$

- si $z \rightarrow -\infty$ -

l'équation (3.25) se comporte comme

$$\phi'' - \phi \left[\lambda^2 + b^2 e^{-(n-2)z} \right] = 0$$

qui, par le changement de variable $y = e^{-(n-2)z}$, se transforme en

$$\phi'' + \frac{\phi'}{y} - \frac{\phi}{(n-2)^2} \left[\frac{\lambda^2}{y^2} + \frac{b^2}{y} \right] = 0$$

dont les solutions sont :

$$\phi = Z_{2\lambda/n-2} \left[\frac{2ib}{n-2} y^{1/2} \right]$$

Z étant une quelconque fonction de Bessel. Nous prendrons comme solutions

$$(3.28) \quad H_{2\lambda/n-2}^{(1)} \left(\frac{2ib}{n-2} e^{-(n-2)/2} Z \right)$$

$$H_{2\lambda/n-2}^{(2)} \left(\frac{2ib}{n-2} e^{-(n-2)/2} Z \right)$$

A l'aide de (3.22, 23, 24, 27, 28), nous obtenons

$$(3.29) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{r,s} = C_{r,s} e^{z/2} \phi_{r,s} \\ \phi_{r,s}(z) \underset{z \rightarrow -\infty}{\sim} H_{2\lambda/n-2}^{(1),(2)} \left(\frac{2ib}{n-2} e^{-(n-2)/2} z \right) \\ \underset{z \rightarrow -\infty}{\sim} \left(\frac{n-2}{nbi} \right)^{1/2} e^{\mp i\pi/2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2\lambda}{n-2} \right)} e^{z/2 \left(\frac{n}{2} - 1 \right)} e^{\mp \frac{2b}{n-2} e^{-\frac{n-2}{2} z}} \\ \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{n-2}{nAi} \right)^{1/2} e^{\mp i\pi/2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2\lambda}{n-2} \right)} r^{\frac{n}{4} - \frac{1}{2}} e^{\mp \frac{2H}{n-2} r - \frac{n-2}{2}} \\ C_{r,s} = \left(\frac{n}{n-2} \frac{A}{k} b \right)^{1/2} e^{i\pi/2} e^{\pm i\pi/2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2\lambda}{n-2} \right)} \end{array} \right.$$

et

$$(3.30) \left\{ \begin{array}{l} f(\lambda, \pm k, A, r) = C_{\pm} e^{z/2} \phi_{\pm} \\ \phi_{+}(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} I_{\lambda}(be^z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2nb} \right)^{1/2} e^{-z/2} e^{be^z} \\ \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} (2nkr)^{-1/2} e^{i\pi/4} e^{-ikr} \\ \phi_{-}(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} K_{\lambda}(be^z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{2b} \right)^{1/2} e^{-z/2} e^{-be^z} \\ \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{2kr}{n} \right)^{-1/2} e^{i\pi/4} e^{ikr} \\ C_{+} = \sqrt{2nb} \quad C_{-} = \sqrt{\frac{2b}{n}} \end{array} \right.$$

Nous voyons ainsi que $\phi_r(z)$ est la transformée de la " solution régulière $\varphi_r(\lambda, k, A, r)$ par la transformation (3.24) et de même pour ϕ_s, ϕ_+, ϕ_- . Nous cherchions le comportement de φ_r pour $r \rightarrow +\infty$, maintenant nous devons étudier celui de $\phi_r(z)$ quand $z \rightarrow +\infty$. C'est ce que nous examinerons dans la section suivante.

b) Introduction de la fonction $X(\lambda, k)$

Parmi les solutions de l'équation (3.25) il en existe une qui s'annule exponentiellement comme :

$$H_{2\lambda/n-2}^{(1)} \left(\frac{2ib}{n-2} e^{-(n-2)/2} z \right)$$

quand $z \rightarrow -\infty$ selon (3.27)

Nous appellerons $H(z)$ cette solution que nous normaliserons comme

$$(3.31) \quad H(z) \underset{z \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{2b}{n-2} e^{-(n-2)/2} z}}{(b e^{-(n-2)/2} z)^{1/2}}$$

Conformément à (3.29) on voit facilement que $H(z)$ est simplement proportionnelle à la solution régulière $\phi_r(z)$. Plus précisément, on a :

$$(3.22) \quad \phi_r(z) = \left(\frac{n-2}{n} \right)^{1/2} e^{-i\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{n-2} \right)} H(z)$$

Nous avons précédemment choisi les coefficients de (3.25) afin que la fonction

$$(3.33) \quad n(z) = \lambda^2 + b^2 (e^{2z} + e^{-(n-2)z})$$

soit une fonction réelle de variable réelle. Il est clair que l'on a

$$(3.34) \quad n(z) > 0 \quad \forall z$$

Ceci implique que ϕ et ϕ'' sont toujours de même signe conformément à (3.25).

$H(z)$ qui est positive à $z = -\infty$, le reste donc quelque soit z . Or (3.27) entraîne qu'une solution de (3.25) est, à $z = +\infty$, une superposition d'exponentielles de la forme :

$$\frac{e^{\pm b e^z}}{(b e^z)^{1/2}}$$

Nous pouvons alors écrire que $H(z)$, pour $z = +\infty$, a le comportement

$$(3.35) \quad H(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\exp [\pm b e^z + X(\lambda, b)]}{(b e^z)^{1/2}}$$

où X est une fonction de λ et b seuls.

Nous allons maintenant essayer de déterminer X sous une forme analytique explicite en appliquant la méthode W. K. B. Ceci nous permettra d'obtenir deux limites entre lesquelles X est comprise, ces deux limites se confondant pour $\text{Re } \lambda \rightarrow +\infty$ comme nous le montrerons.

c) Recherche de la limite inférieure de $X(\lambda, b)$

En appliquant la méthode W. K. B., nous posons

$$(3.36) \quad \begin{cases} H(z) = A(z) e^{S(z)} \\ \left(\frac{dS}{dz} \right)^2 = \lambda^2 + b^2 (e^{2z} + e^{-(n-2)z}) \end{cases}$$

Par dérivation de $H(z)$ et en reportant le résultat dans (3.35), nous obtenons pour $A(z)$ l'équation :

$$(3.37) \quad A'' + 2A'S' + S''A = 0$$

La solution standard s'obtient en négligeant A'' , ce qui conduit à

$$2A'S' + S''A = 0$$

$$\frac{S''}{S'} = - \frac{2A'}{A}$$

$$S' = \frac{C}{A^2} = \left[\lambda^2 + b^2 (e^{2z} + e^{-(n-2)z}) \right]^{1/2}$$

soit, en posant $C = \exp X_0$,

$$(3.38) \quad A \simeq \frac{e^{X_0/2}}{\left[\lambda^2 + b^2 (e^{2z} + e^{-(n-2)z}) \right]^{1/4}}$$

finalement

$$(3.39) \quad H(z) = \frac{\exp \left\{ \frac{X_0}{2} + \int_0^z \left[\lambda^2 + b^2 (e^{2y} + e^{-(n-2)y}) \right]^{1/2} dy \right\}}{\left[\lambda^2 + b^2 (e^{2z} + e^{-(n-2)z}) \right]^{1/4}}$$

La constante d'intégration X_0 doit maintenant être choisie en vue de satisfaire la condition (3.31), ce qui conduit à :

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\exp \left\{ \frac{X_0}{2} + \int_0^z \left[\lambda^2 + b^2 (e^{2y} + e^{-(n-2)y}) \right]^{1/2} dy \right\}}{\left[\lambda^2 + b^2 (e^{2z} + e^{-(n-2)z}) \right]^{1/4}} =$$

$$= \frac{\exp \left[- \frac{2b}{n-2} e^{-\frac{n-2}{2} z} \right]}{\left[b e^{-(n-2)/2} z \right]^{1/2}}$$

soit :

$$(3.40) \quad \frac{1}{2} X_0 = \lim_{z \rightarrow -\infty} \left\{ - \int_0^z \left[\lambda^2 + b^2 (e^{2y} + e^{-(n-2)y}) \right]^{1/2} dy - \frac{2b}{n-2} e^{-\frac{n-2}{2} z} \right\}$$

Nous allons montrer que $X > X_0$.

A partir de (3.37) nous obtenons, après multiplication par A :

$$(3.41) \quad A \frac{d^2 A}{dz^2} + 2A \frac{dA}{dz} \frac{dS}{dz} + A^2 \frac{d^2 S}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d}{dz} \left(A^2 \frac{dS}{dz} + A \frac{dA}{dz} \right) = \left(\frac{dA}{dz} \right)^2 > 0$$

Remarquons que, conformément à (3.38),

$$A \frac{dA}{dz} \Big|_{z = \pm \infty} = 0$$

en intégrant (3.41) entre $-\infty$ et $+\infty$, nous obtenons :

$$(3.42) \quad \left(A^2 \frac{dS}{dz} \right)_{z=+\infty} - \left(A^2 \frac{dS}{dz} \right)_{z=-\infty} > 0$$

A partir de (3.35, 36, 38), nous avons :

$$(3.43) \quad A(-\infty) \frac{\exp\left(\frac{X_0}{2}\right)}{(dS/dz)^{1/2}}$$

$$A(+\infty) \frac{\exp\left(X - \frac{1}{2} X_0\right)}{(dS/dz)^{1/2}}$$

donc (3.42) et (3.43) nous donnent :

$$(3.44) \quad \exp\left(X - \frac{1}{2} X_0\right) > \exp\left(\frac{1}{2} X_0\right)$$

soit

$$X > X_0$$

ce qui nous montre que X_0 donné par (3.40) est une limite inférieure de X . Déterminons cette limite inférieure explicitement. En tenant compte de :

$$\lambda^2 + b^2 (e^{2y} + e^{-(n-2)y}) > \lambda^2 + b^2 e^{-(n-2)y}$$

$$\text{et de} \quad \int_0^z \left[\lambda^2 + b^2 (e^{2y} + e^{-(n-2)y}) \right]^{1/2} dy - \int_0^z \left[\lambda^2 + b^2 e^{-(n-2)y} \right]^{1/2} dy$$

$$< \int_0^z \frac{b^2 e^{2y} dy}{\left[\lambda^2 + b^2 (e^{2y} + e^{-(n-2)y}) \right]^{1/2} + \left[\lambda^2 + b^2 e^{-(n-2)y} \right]^{1/2}}$$

$$< \int_0^z b^2 e^{2y} dy = b^2 \left(\frac{e^{2z}}{2} - 1 \right)$$

nous obtenons

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \left\{ - \int_0^z \left[\lambda^2 + b^2 e^{-(n-2)y} \right]^{1/2} dy \right\} < \lim_{z \rightarrow -\infty} \left\{ - \int_0^z dy \left[\lambda^2 + b^2 (e^{2y} + e^{-(n-2)y}) \right]^{1/2} \right\}$$

et l'on peut remplacer le 2ème membre de l'inégalité par le premier dans l'expression de X_0 puisque X_0 est une limite inférieure de X .

Nous faisons le changement de variable

$$x = e^{-(n-2)y}$$

$$\int_0^z \left[\lambda^2 + b^2 e^{-(n-2)y} \right]^{1/2} dy = - \frac{1}{n-2} \int_1^{e^{-(n-2)z}} \left[\lambda^2 + b^2 x \right]^{1/2} \frac{dx}{x}$$

un nouveau changement de variable

$$x = \frac{\lambda^2}{b^2} \operatorname{sh}^2 u$$

conduit à

$$\begin{aligned} \int_0^z \left[\lambda^2 + b^2 e^{-(n-2)y} \right]^{1/2} dy &= - \frac{2\lambda}{n-2} \int_{\operatorname{Arg sh} b/\lambda}^{\operatorname{Arg sh} b/\lambda e^{-(n-2)/2} z} \frac{\operatorname{ch}^2 u}{\operatorname{sh} u} du = \\ &= - \frac{2\lambda}{n-2} \left[\ln \operatorname{th} \frac{u}{2} + \operatorname{ch} u \right]_{\operatorname{Arg sh} b/\lambda}^{\operatorname{Arg sh} b/\lambda e^{-(n-2)/2} z} \end{aligned}$$

Comme

$$\operatorname{ch} (\operatorname{Arg sh} v) = (1+v^2)^{1/2}$$

$$\operatorname{th} \frac{u}{2} = \frac{2 \operatorname{sh} u}{1 + \operatorname{ch} u}$$

le résultat ci-dessus nous donne

$$- \int_0^z \left[\lambda^2 + b^2 e^{-(n-2)y} \right]^{1/2} dy = \frac{2\lambda}{n-2} \left\{ \left(1 + \frac{b^2}{\lambda^2} e^{-(n-2)z} \right)^{1/2} - \left(1 + \frac{b^2}{\lambda^2} \right)^{1/2} + \right. \\ \left. + \ln \frac{e^{-(n-2)z/2} \left[1 + \left(1 + \frac{b^2}{\lambda^2} \right)^{1/2} \right]}{\left[1 + \frac{b^2}{\lambda^2} e^{-(n-2)z/2} \right]^{1/2}} \right\}$$

ce qui conduit à

$$(3.45) \quad X_0 = \lim_{z \rightarrow -\infty} X = \frac{4\lambda}{n-2} \left\{ \ln \frac{\lambda}{b} \left[1 + \left(1 + \frac{b^2}{\lambda^2} \right)^{1/2} \right] - \left(1 + \frac{b^2}{\lambda^2} \right)^{1/2} \right\}$$

d) Recherche de la limite supérieure de $X(\lambda, b)$

En vue de trouver une limite supérieure pour X , nous ferons le changement de fonction suivant dans (3.37)

$$(3.46) \quad \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} = B$$

En dérivant (3.46) et en reportant les résultats dans (3.37) nous obtenons pour B l'équation suivante :

$$(3.47) \quad \frac{dB}{dz} + 2B \frac{dS}{dz} + \frac{d^2S}{dz^2} = -B^2 < 0$$

En multipliant (3.47) par $e^{2S(z)}$ et, en intégrant entre $-\infty$ et z , nous obtenons

$$e^{2S(z)} B \Big|_{-\infty}^z + \int_{-\infty}^z e^{2S(y)} \frac{d^2S}{dy^2} dy < 0$$

Conformément à (3.31, 36, 38) :

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} S(z) = -\infty$$

L'expression ci-dessus devient alors

$$(3.48) \quad e^{2S(z)} B + \int_{-\infty}^z e^{2S(y)} \frac{d^2 S}{dy^2} dy < 0$$

L'intégrale de (3.48) peut s'intégrer par partie suivant

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^z e^{2S(y)} \frac{d^2 S}{dy^2} dy &= \int_{-\infty}^z \frac{d^2 S}{dy^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{e^{2S(y)}}{2} \right) \frac{1}{dS/dy} dy \\ &= \frac{e^{2S(y)}}{2} \frac{d^2 S/dy^2}{dS/dy} \left[-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^z e^{2S(y)} \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 S/dy^2}{dS/dy} \right) dy \right] \end{aligned}$$

or, conformément à (3.36)

$$2S'S'' = b^2 (2e^{2y} - (n-2)e^{-(n-2)y})$$

$$\frac{S''}{S'} = \frac{1}{2} \frac{b^2 [2e^{2y} - (n-2)e^{-(n-2)y}]}{\lambda^2 + b^2 (e^{2y} + e^{-(n-2)y})} \underset{y \rightarrow -\infty}{\sim} -\frac{n-2}{2}$$

par suite, compte tenu du comportement de $S(y)$ pour $y \rightarrow -\infty$, après multiplication de (3.48) par $e^{-2S(z)}$ et en réexprimant B en fonction de A conformément à (3.46), l'inégalité (3.48) devient :

$$(3.49) \quad \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} + \frac{1}{2} \frac{d^2 S}{dz^2} \frac{1}{dS/dz} < \frac{e^{-2S(z)}}{2} \int_{-\infty}^z e^{2S(y)} \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 S/dy^2}{dS/dy} \right) dy$$

or

$$\frac{d}{dz} \ln \left[A \left(\frac{dS}{dz} \right)^{1/2} \right] = \frac{1}{A} \frac{dS}{dz} + \frac{d^2 S/dz^2}{2dS/dz}$$

(3.49) s'écrit donc

$$\frac{d}{dz} \ln \left[A \left(\frac{dS}{dz} \right)^{1/2} \right] < \frac{e^{-2S(z)}}{2} \int_{-\infty}^z e^{2S(y)} \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 S/dy^2}{dS/dy} \right) dy$$

L'intégration de cette expression entre $-\infty$ et $+\infty$ et l'utilisation de (3.43), (3.50) nous donnent :

$$(3.51) \quad X - X_0 < \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2S(z)} dz \int_{-\infty}^z e^{2S(y)} \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 S / dy^2}{dS / dy} \right) dy$$

qui est la limite supérieure cherchée. Nous allons en donner une expression analytique explicite .

Nous avons précédemment calculé $\frac{S''}{S'}$, en nous servant du résultat

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 S / dy^2}{dS / dy} \right) = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{\lambda^2 \{ 4e^{2y} + (n-2)^2 e^{-(n-2)y} \} + b^2 n^2 e^{-(n-4)y}}{\left[\lambda^2 + b^2 \{ e^{2y} + e^{-(n-2)y} \} \right]^2} > 0$$

Cette expression est toujours positive et s'annule à $\pm \infty$. Donc l'intégrale inférieure peut se majorer en remplaçant $e^{2S(y)}$ par $e^{2S(z)}$. Mais , en appliquant brutalement cette méthode, nous obtenons une expression divergente, aussi ne nous en servons nous que dans quelques lignes après avoir transformé l'intégrale double. Posons :

$$f(z) = \int_{-\infty}^z e^{2S(y)} \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 S / dy^2}{dS / dy} \right) dy$$

l'intégrale de (3.51) s'écrit :

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2S(z)} f(z) dz$$

Nous l'intégrons par partie conformément à

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \frac{d}{dz} \left(-\frac{e^{-2S(z)}}{2} \right) \cdot \frac{1}{dS/dz} dz = \\ &= \frac{-e^{-2S(z)} f(z)}{4 dS/dz} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2S(z)} \frac{d}{dz} \left(\frac{f(z)}{dS/dz} \right) dz \end{aligned}$$

$$\frac{e^{-2S(z)} f(z)}{dS/dz} = \frac{e^{-2S(z)}}{dS/dz} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2S(y)} \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 S/dy^2}{dS/dy} \right) dy$$

et majorons l'intégrale comme précédemment indiqué

$$\frac{e^{-2S(z)} f(z)}{dS/dz} < \frac{1}{dS/dz} \int_{-\infty}^z \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 S/dy^2}{dS/dy} \right) dy + \frac{1}{dS/dz} \left(\frac{d^2 S/dz^2}{dS/dz} - \frac{S''(-\infty)}{S'(-\infty)} \right)$$

Nous avons vu que :

$$\frac{S''}{S'} \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} -\frac{n-2}{2}$$

et l'expression précédemment calculée de S''/S' montre que

$$\frac{S''}{S'} \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} 1$$

finalement :

$$\frac{e^{-2S(z)} f(z)}{dS/dz} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$$

compte tenu du comportement de dS/dz à $\pm \infty$.

Alors

$$I = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2S(z)} \frac{d}{dz} \left(\frac{f(z)}{dS/dz} \right) dz$$

qui, la dérivation étant effectuée et l'expression explicite de $f(z)$ étant écrite, nous donne :

$$I = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dS}{dz} \right)^{-1} \frac{d}{dz} \left(\frac{d^2 S/dz^2}{dS/dz} \right) dz - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{e^{-2S(z)} (d^2 S/dz^2)}{(dS/dz)^2} \int_{-\infty}^z e^{2S(y)} \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 S/dy^2}{dS/dy} \right) dy$$

que nous écrirons

$$I = \frac{1}{4} \left[I_1 - I_2 \right]$$

Etudions chaque intégrale

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{dS/dz} \frac{d}{dz} \left(\frac{d^2 S/dz^2}{dS/dz} \right) dz$$

$$= \frac{1}{dS/dz} \cdot \frac{d^2 S/dz^2}{dS/dz} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(d^2 S/dz^2)^2}{(dS/dz)^3} dz$$

Le terme intégré est nul conformément au comportement de S''/S' et S' à $\pm \infty$ donc I_1 donne une contribution positive à I .

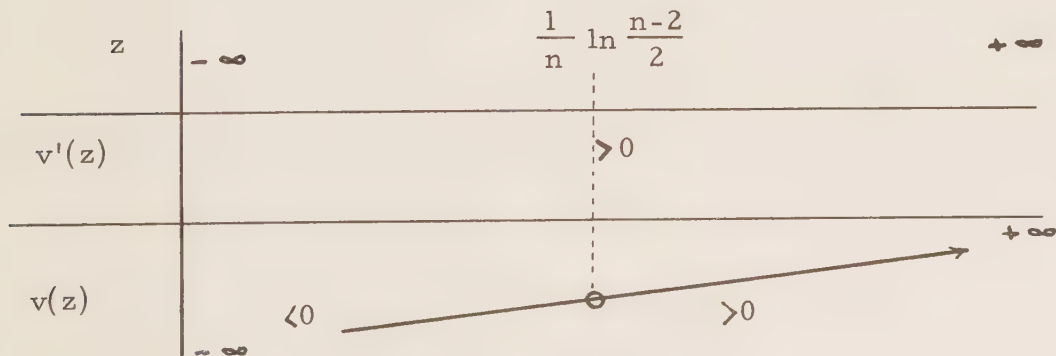
$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2S(z)} \frac{d^2 S/dz^2}{(dS/dz)^2} \int_{-\infty}^z e^{2S(y)} \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 S/dy^2}{dS/dy} \right) dy$$

L'intégrale intérieure est toujours positive d'après l'étude de $\frac{d}{dy} \left(\frac{S''}{S'} \right)$ faite précédemment. L'intégrale extérieure change de signe avec $d^2 S/dz^2$. Or le signe de $d^2 S/dz^2$ est celui de la fonction

$$v(z) = 2e^{2z} - (n-2)e^{-(n-2)z}$$

dont les variations, compte tenu de ce que

$$v'(z) = 4e^{2z} + (n-2)^2 e^{-(n-2)z} > 0$$



On voit alors que I_2 est négative entre $-\infty$ et $1/n \ln (n-2)/2$ et positive entre $1/n \ln (n-2)/2$ et $+\infty$.

Comme l'on cherche une limite supérieure de I, on voit qu'on l'obtiendra aisément en remplaçant I_2 par sa partie négative, ce qui nous donne (3.52) :

$$X - X_0 < \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(d^2 S/dz^2)^2}{(dS/dz)^3} dz - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\frac{1}{n} \ln \frac{n-2}{2}} e^{-2S(z)} \frac{d^2 S/dz^2}{(dS/dz)^2} \int_{-\infty}^z e^{2S(y)} \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 S/dy^2}{dS/dy} \right) dy$$

le second membre étant maintenant positif; considérons le 2^e terme. L'intégrale

$-\int_{-\infty}^{\frac{1}{n} \ln \frac{n-2}{2}}$ étant positive, nous pouvons majorer l'intégrale intérieure suivant une technique déjà utilisée; nous avons alors

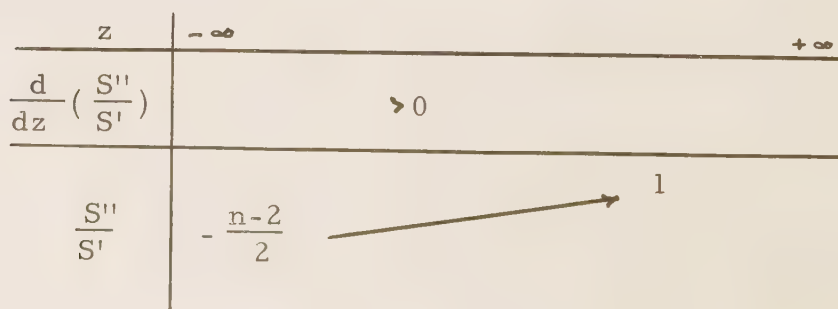
$$3.53) \quad X - X_0 < \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(d^2 S/dz^2)^2}{(dS/dz)^3} dz - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\frac{1}{n} \ln \frac{n-2}{2}} \frac{d^2 S/dz^2}{(dS/dz)^2} dz \int_{-\infty}^z \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 S/dy^2}{dS/dy} \right) dy$$

en effectuant l'intégration et en réduisant le 2^e membre, nous obtenons

$$(3.54) \quad X - X_0 < \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{n} \ln \frac{n-2}{2}}^{\infty} \frac{(d^2 S/dz^2)^2}{(dS/dz)^3} dz - \frac{n-2}{8} \int_{-\infty}^{\frac{1}{n} \ln \frac{n-2}{2}} \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{dS/dz} \right) dz$$

$$< \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{n} \ln \frac{n-2}{2}}^{\infty} dz \frac{(d^2 S/dz^2)^2}{(dS/dz)^3} + \frac{n-2}{8} \cdot \frac{1}{S' \left(\frac{1}{n} \ln \frac{n-2}{2} \right)}$$

Nous savons que la dérivée de S''/S' est toujours positive, ses variations sont telles que



donc
$$\frac{d^2 S/dz^2}{dS/dz} \leq 1$$

Nous en déduisons que

$$\frac{(d^2 S/dz^2)^2}{(dS/dz)^3} \leq \frac{d^2 S/dz^2}{(dS/dz)^2} = \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{dS/dz} \right)$$

La première intégrale est donc majorée par celle obtenue en faisant la substitution convenable. Après intégration, nous avons :

$$X - X_0 \leq \frac{1}{4} \frac{1}{S^1 \left(\frac{1}{n} \ln \frac{n-2}{2} \right)} + \frac{n-2}{8} \frac{1}{S^1 \left(\frac{1}{n} \ln \frac{n-2}{2} \right)} = \frac{n}{8} \frac{1}{S^1 \left(\frac{1}{n} \ln \frac{n-2}{2} \right)}$$

Compte tenu de la valeur de

$$S^1 \left(\frac{1}{n} \ln \frac{n-2}{2} \right) \text{ calculée conformément à (3.36)}$$

$$S^1 \left(\frac{1}{n} \ln \frac{n-2}{2} \right) = \left[\lambda^2 + b^2 \frac{n}{n-2} \left(\frac{n-2}{2} \right)^{2/n} \right]^{-1/2}$$

nous arrivons finalement à :

$$(3.55) \quad X \leq X_0 + \frac{n}{8} \left[\lambda^2 + \frac{nb^2}{n-2} \left(\frac{n-2}{2} \right)^{2/n} \right]^{-1/2}$$

Par conséquent, les relations (3.45) et (3.55) nous donnent une limite inférieure et supérieure pour la fonction X qui est la fonction désirée reliant la fonction $H(z)$ régulière à $z = -\infty$ (c'est à dire à $r = 0$) à l'autre point singulier $z = +\infty$ (c'est à dire $r = +\infty$).

e) Limite asymptotique de la fonction de Jost

Conformément à la définition (3.14) des fonctions de Jost, nous savons que la solution régulière φ_r s'exprime en termes de fonctions de Jost par la relation :

$$(3.56) \quad \varphi_r(\lambda, k, A, r) = \frac{f(\lambda, k, A) f(\lambda, -k, A, r) - f(\lambda, -k, A) f(\lambda, k, A, r)}{W[\underline{f(\lambda)}, -k, A, r], f(\lambda, k, A, \underline{r})}$$

La solution régulière transformée ϕ_r qui est liée à φ_r par la transformation (3.24) s'exprime donc d'une manière identique en $f(\lambda, \pm k, A)$. Cette fonction ϕ_r est liée aux fonctions $\phi_{\pm}$ transformées de $f(\lambda, \pm k, A, r)$ par une relation du type

$$(3.57) \quad \phi_r = \alpha \phi_+ + \beta \phi_-$$

où clairement α est la fonction de Jost $f(\lambda, k, A)$ et β la fonction de Jost $f(\lambda, -k, A)$.

Il est aisé de calculer le coefficient α . (3.57) montre que

$$\alpha = \frac{W[\underline{\phi_r}, \underline{\phi_-}]}{W[\underline{\phi_+}, \underline{\phi_-}]}$$

c'est à dire en vertu de (3.32)

$$\alpha = \left(\frac{n-2}{n} \right)^{1/2} e^{-i\pi/2 - i\pi\lambda/n-2} \frac{W[\underline{H(z)}, \underline{\phi_-(z)}]}{W[\underline{\phi_+(z)}, \underline{\phi_-(z)}]}$$

or

$$W[\underline{\phi_+(z)}, \underline{\phi_-(z)}] = -1$$

donc

$$W[\underline{H(z)}, \underline{\phi_-(z)}] = -2 \quad n/2 \quad e^X$$

donc

$$(3.58) \quad \alpha = \left(\frac{n-2}{2} \right)^{1/2} e^{-i\pi/2 - i\pi\lambda/n-2} e^X$$

ce qui redonne le résultat de Wannier pour $n = 4$

Nous voyons que la fonction e^X est simplement proportionnelle à la fonction de Jost $f(\lambda, k, A)$. Par conséquent, la connaissance de X , dont seule la dépendance en λ nous intéresse, résoud complètement le problème du comportement asymptotique en λ de $f(\lambda, k, A)$.

Il est clair que, ce comportement étant connu, des arguments semblables permettent aussi de trouver, en principe, celui de $f(\lambda, -k, A)$. Le problème est un peu plus complexe. Nous savons que dans le cas $n = 4$, le coefficient β qui est $f(\lambda, -k, A)$, est relié à α . Wannier a montré ceci par application du théorème de Floquet et en utilisant les propriétés de symétrie de l'équation

différentielle. Ici nous n'avons plus de propriétés de symétrie et le problème se trouve de ce fait plus compliqué. Nous avons essayé de le résoudre en nous servant du théorème de Floquet et en utilisant les propriétés des équations différentielles à coefficients périodiques. On n'aboutit pas à une expression explicite de β mais on peut dire que β est bien lié à α comme pour le cas $n = 4$. Ceci se voit assez simplement en prenant le wronskien de la solution régulière et de la solution irrégulière exprimées en fonction de ϕ_+ et ϕ_- .

En effet, nous avons

$$\phi_r = \alpha \phi_+ + \beta \phi_- \quad (3.59)$$

$$\phi_s = u \phi_+ + v \phi_-$$

alors

$$\begin{aligned} W[\phi_r, \phi_s] &= W[\phi_+ + \phi_-, u\phi_+ + v\phi_-] \\ &= (\alpha v - \beta u) W[\phi_+, \phi_-] \end{aligned}$$

comme

$$W[\phi_+, \phi_-] = -1$$

$$W[\phi_r, \phi_s] = \frac{2(n-2)}{n} e^{i\pi/2}$$

nous obtenons la relation

$$\alpha v - \beta u = \frac{2(n-2)}{n} e^{-i\pi/2} \quad (3.60)$$

qui lie α et β de la même manière que pour le cas $n=4$. Mais il reste à montrer que u, v et α sont liés par une relation du type de celle trouvée par Wannier, ce que nous n'avons pas pu établir en raison des difficultés mathématiques impliquées.

Cependant, comme nous ne désirons pas donner la position exacte des zéros de la fonction de Jost $f(\lambda, -k, A)$, qui dépend explicitement du choix particulier des paramètres du potentiel, mais simplement examiner si, dans le plan du moment angulaire complexe, la partie réelle de ces zéros, liée, comme nous le savons, avec la position des pôles des éléments d'ondes partielles de la matrice S , reste ou ne reste pas bornée, nous pouvons nous passer du calcul explicite du comportement pour les grandes valeurs de λ des deux fonctions de Jost. Nous nous

limiterons donc à la discussion des propriétés asymptotiques de $f(\lambda, k, A)$.

Conformément à (3.45) et (3.55), nous voyons que pour $\lambda \rightarrow +\infty$ les deux limites inférieure et supérieure de X deviennent identiques

$$(3.61) \quad X(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \frac{4\lambda}{n-2} \left\{ \ln \frac{\lambda}{b} \cdot \left[1 + \left(1 + \frac{b^2}{\lambda^2} \right)^{1/2} \right] - \left(1 + \frac{b^2}{\lambda^2} \right)^{1/2} \right\}$$

La comparaison avec le cas $n=4$ montre que notre expression est une généralisation très naturelle, pour de grandes valeurs de λ , de celle obtenue alors, notre expression se réduisant à celle de Wannier pour $n=4$.

Ce que nous venons de dire signifie que nous sommes autorisés à considérer cette limite asymptotique comme la limite correcte indépendamment des conditions sous lesquelles les relations (3.45) et (3.55) ont été obtenues. Nous soulignerons que, comme nous l'espérons, en ce qui concerne les propriétés analytiques des fonctions de Jost en λ , il n'apparaît pas de modifications essentielles entre le cas $n=4$ et le cas n quelconque.

4° - DISCUSSION DE L'EXISTENCE DE LA REPRESENTATION DE MANDELSTAM

A partir de (3.61), nous voyons que

$$(3.62) \quad X(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4\lambda}{n-2} \ln \frac{\lambda}{b}$$

donc, conformément à ce que nous avons souligné dans le paragraphe 2, les fonctions de Jost ne sont ni des polynômes ni des exponentielles. Ceci implique qu'elles ont un nombre infini de zéros dans le plan du moment angulaire complexe. Du fait de (3.15), ceci signifie que les éléments de la matrice S sont des fonctions purement méromorphes de λ avec un nombre infini de pôles.

L'équivalence (3.62) montre que la position de ces pôles dans le plan du moment angulaire complexe comme fonction de l'énergie peut être arbitrairement éloignée de l'axe imaginaire λ . En effet, la fonction de Jost étant proportionnelle à e^X , on peut écrire :

$$f(\lambda, k, A) = C e^X$$

où C est la constante de proportionnalité déterminée à partir de (3.32). D'après (3.62)

$$(3.63) \quad f(\lambda, k, A) \sim C e^{\frac{4\lambda}{n-2} \ln \frac{\lambda}{b}} = C \left(\frac{\lambda}{b} \right)^{\frac{4\lambda}{n-2}}$$

on sait que :

$$b = A^{2/n} K^{(1-2/n)} = A^{2/n} k^{(1-2/n)} e^{-i\pi/2} \quad n > 2$$

où k est la variable moment linéaire liée à l'énergie E par $E = k^2$. Il est clair que si l'énergie croît, b croît et par conséquent $f(\lambda, k, A)$ tend vers zéro. Ceci prouve que nous avons encore des pôles pour les grandes valeurs de λ donc que la partie réelle de ces pôles peut devenir infinie.

La position de ces pôles étant fonction de l'énergie, excepté pour quelques annulations accidentelles, les zéros de $f(\lambda, k, A)$ et ceux de $f(\lambda, -k, A)$ ne coïncideront pas en général. Nous avons donc un nombre infini de pôles pour les éléments de la matrice S .

Nous rappelons que dans le cas de potentiels Yukawiens moins singuliers à l'origine que le terme centrifuge, on peut prouver que les pôles de $S(\lambda, k)$ dans le plan complexe λ se trouvent tous à gauche d'une ligne $\text{Re } \lambda = \lambda_{\max}$ de sorte que finalement une représentation de Mandelstam peut être écrite.

Comme nous venons de montrer que les éléments de matrice S , ainsi que l'amplitude totale de diffusion conformément à (3.18), sont des fonctions méromorphes de λ avec un nombre infini de pôles dont la partie réelle peut devenir infinie, on ne peut pas écrire de représentation de Mandelstam dans le cas de potentiels plus singuliers à l'origine que le terme centrifuge. Ceci implique que l'amplitude totale de diffusion a une singularité essentielle dans la variable moment de transfert t tendant vers ∞ .

CONCLUSION

Dans ce travail nous avons étudié les traits nouveaux qui se dégagent dans le cas de potentiels singuliers répulsifs à l'origine en r^{-n} au point de vue des propriétés analytiques des éléments de la matrice S par rapport à la variable moment angulaire .

Dans le cas de potentiels tels que :

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 V(r) = A^2 r^{-n}$$

$$A^2 > 0$$

$$n > 2$$

la solution régulière et les solutions de Jost de l'équation de Schrödinger sont des fonctions entières paires en λ de sorte que ceci est également vrai pour les fonctions de Jost. Les propriétés de ces fonctions montrent qu'il y a un nombre infini de zéros dans le plan de la variable moment angulaire complexe dont la partie réelle peut devenir infinie en fonction de l'énergie. Ceci implique :

1° que la matrice S est une fonction méromorphe en λ avec un nombre infini de pôles ;

2° qu'il est impossible d'écrire une représentation de Mandelstam car l'amplitude de scattering présente une singularité essentielle pour les grandes valeurs du moment de transfert .

Nous n'avons pas cherché la distribution asymptotique précise des zéros de la fonction de Jost car cela n'ajoutait rien à notre étude. Ce problème ne pourrait d'ailleurs être traité qu'en spécifiant les paramètres A et n définissant le comportement du potentiel à l'origine .

Les résultats auxquels nous avons abouti semblent être des propriétés générales des problèmes de diffusion par des interactions plus singulières à l'origine que le terme centrifuge . Ils pourraient certainement être généralisés

à des classes plus étendues de potentiels singuliers ou à coeur dur que ceux que nous avons considérés .

Il serait également intéressant de traiter le problème inverse du nôtre. Ceci reviendrait à se donner une distribution de pôles de la matrice S dans le plan du moment angulaire complexe et à déterminer le comportement à l'origine de l'interaction, c'est à dire de $V(r)$. Ce problème pourrait être considéré comme l'extension à la variable λ d'un problème analogue étudié par Regge dans la variable k . La différence entre les deux serait que, dans le cas de la variable k , on a besoin d'interactions de portée finie tandis que dans celui de la variable λ aucune hypothèse n'est nécessaire sur la queue du potentiel ; il suffit simplement que son comportement à l'origine l'emporte sur le terme centrifuge, ce qui semble une situation physique .

BIBLIOGRAPHIE

Chapitre I

V. de ALFARO et C. ROSSETTI
Nuovo Cimento 18 783 1960

V. de ALFARO, E. PREDAZZI et C. ROSSETTI
Nuovo Cimento 31 42 1964

V. BARGMAN
Rev. of Mod. Phys. 21 488 1949

R. BLANCKENBECLER, M. L. GOLDBERGER, N. KHURI, S. B. TREIMAN
Annals of Phys. 10 62 1960

J. BOWCOCK et A. MARTIN
Nuovo Cimento 14 403 1959

J. M. CHARAP et S. FUBINI
Nuovo Cimento 14 540 1959
" 15 77 1960

M. FROISSART
Journ. of Math. Phys. 3 922 1962

N. KHURI
Phys. Rev. 107 1148 1957

A. KLEIN
Journ. Math. Phys. 1 41 1960

S. MANDELSTAM
Annals of Phys. 19 254 1962
Phys. Rev. 112 1344 1958

A. MARTIN
Nuovo Cimento 14 403 1959
" 15 99 1960

A. MARTIN
" Selected Topics in analyticity in potential scattering "
Lectures on high energy physics. Herceg-Novi 1961

R. G. NEWTON
Journ. of Math. Phys. 3 867 1962

E. PREDAZZI

" Topics on Potential Theory and High Energy Physics " C. E. N. Lyon 1964

T. REGGE

Nuovo Cimento 14 951 1959

" 18 947 1960

T. REGGE

"Mathematical theory of potential scattering "

Lectures on high energy physics . Herceg-Novti 1961

Chapitre II

J. CHALLIFOUR et R.J. EDEN

Journ. of Math. Phys. 4 359 1963

E. PREDAZZI et T. REGGE

Nuovo Cimento 24 518 1962

Chapitre III

K. M. CASE

Phys. Rev. 80 581 1960

ERDELYI, MAGNUS, OBERHETTINGER, TRICOMI

" Higher transcendental functions "

Bateman Manuscript project Mc Graw Hill (N-Y) 1953

FORSYTH

" Theory of differential equations "

Dover Publications Inc N-Y 1959

N. KHURI et A. PAIS

Preprint

G. PETIAU

" La théorie des fonctions de Bessel "

Edition du CNRS 1955

T. REGGE

Nuovo Cimento 9 491 1958

R. F. SAWYER

Preprint

VALIRON

" Cours d'analyse mathématique "

Masson et Cie Paris 1950

E. VOGT et GH. WANNIER
Phys. Rev. 95 1190 1954

G. H. WANNIER
Quarterly of Applied Mathematics 11 33 1953

WHITTAKER and WATSON
" A course of modern analysis "
4th Edition Cambridge University Press 1962

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I - Définitions et questions générales concernant une théorie non relativiste du potentiel	4
1° - Fondements de la théorie du potentiel	5
2° - Propriétés d'analycité de la matrice S par rapport à la variable moment linéaire k	10
3° - Propriétés d'analycité de la matrice S par rapport à la variable moment angulaire λ	11
4° - Propriétés d'analycité de la matrice S par rapport aux variables λ et k	14
5° - La représentation de Mandelstam en théorie du potentiel.....	14
a) analycité en t pour s fixé.....	15
b) analycité en s pour t fixé.....	16
CHAPITRE II - Analycité par rapport au moment angulaire pour des potentiels singuliers de type A^2/r^4	18
1° - Le travail de Predazzi et Regge.....	19
2° - Le travail de Challifour et Eden.....	21
CHAPITRE III - Analycité par rapport au moment angulaire pour des potentiels singuliers de type A^2/r^n	23
1° - Introduction	24
2° - Propriétés générales des fonctions de Jost	26
3° - Propriétés asymptotiques des fonctions de Jost pour de grandes valeurs de λ	31
a) Définition des solutions de l'équation de Schrödinger en ses points singuliers.....	32
b) Introduction de la fonction $X(\lambda, k)$	36
c) Recherche de la limite inférieure de X.....	37
d) Recherche de la limite supérieure de X.....	41
e) Limite asymptotique de la fonction de Jost.....	47

4° - Discussion de l'existence de la représentation de Mandelstam. 50

CONCLUSION. 52

BIBLIOGRAPHIE

Vu

Les Membres du Jury

A. SARAZIN Président

G. PHILBERT Examineurs

E. PREDAZZI

R. NATAF Invité

Vu et Approuvé

Le Doyen de la Faculté des Sciences

J. BRACONNIER

Vu et accordé le permis d'imprimer

Lyon, le 24 Mai 1964

Le Recteur

Président du Conseil de l'Université

P. LOUIS

